DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

KLAUSUR

4.8.2012

Achten Sie auf das "Deckblatt" (S. 3).

Viel Erfolg!

(1) *Definitionen, wichtige Resultate.*

Die in dieser Aufgabe angeforderten Antworten bzw. Beispiele brauchen Sie einfach nur anzugeben – ohne jegliche Begründung oder Beweise.

(a) Ein projektiver Modul ist flach. Gilt die Umkehrung?
Wenn ja, dann mit *Ja* antworten, wenn nein, dann mit *Nein* und einem Beispiel.
(b) Definieren Sie, was ein injektiver A-Modul ist.
(c) Definieren Sie, was ein *Bewertungsring* ist.
(d) Was ist ein *diskreter Bewertungsring* (vom Rang 1)?
(e) Definieren Sie was ein *ganz abgeschlossener Integritätsbereich* ist.
Geben Sie ein Beispiel eines ganz abgeschlossenen Integritätsbereiches und ein Beispiel eines nicht ganz abgeschlossenen Integritätsbereiches.
(f) Es gilt $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = 0$ für alle A-Moduln N und für alle $n \geq 1$ genau dann, wenn der A-Modul M _____ ist.
(g) Geben Sie den Wert von $v_7(\frac{98}{1-15})$ an – wobei v_7 die 7-adische Bewertung in $\mathbb{Q}$ ist.
(h) Bestimmen Sie die (Krull) Dimension folgender Integritätsbereiche: k, $k[X]$, $k(X)$, $k(X)[Y,Z]$, $k[X,Y,X/Y]$.

$\leq$22 Punkte

(2) *Primäre Zerlegung.*

Finden Sie eine minimale primäre Zerlegung vom Ideal $I := (X^2 - X, XY - X)$ im Ring $A := k[X,Y]$. Geben Sie an, welche Komponenten eingebettet und welche isoliert sind.

$\leq$14 Punkte

(3) *Zariski Topologie.*

(a) Sei $I \subset A$ ein Ideal. Dann gilt: $V(I) = \varnothing \Rightarrow I = A$.

(b) Ist $\mathrm{Spec}(A)$ unzusammenhängend, dann hat der Ring A ein idempotentes Element e, mit $0 \neq e \neq 1$.[FN1]

$\leq$14 Punkte

[FN1] *Hinweis*: Benutzen Sie die Eigenschaften von $V(\cdot)$ bzgl. Inklusionen, Durchschnitte und Vereinigungen, um Elementen $e_i \in I_i$ zu finden ($i = 1,2$), mit $1 = e_1 + e_2$ und e_1e_2 nilpotent (d.h. $\exists f \in \mathbb{N} : (e_1e_2)^f = 0$). Dann schreiben Sie $1 = 1^{2f}$ als $e_1^f a_1 + e_2^f a_2$, woraus Sie ein Element $e \in A \setminus \{0,1\}$ definieren können, das $e(1-e) = 0$ erfüllt (also, $e^2 = e$)!

(4) *Flachheit* & Tor.
Seien $A := k[X,Y]$, $\mathfrak{m} := (X,Y)$, wobei wir den A-Modul $A/\mathfrak{m}$ mit k identifizieren.

(a) Beweisen Sie, dass folgende Sequenz eine *exakte* Sequenz von A-Moduln ist:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} A^2 \xrightarrow{g} \mathfrak{m} \longrightarrow 0\ ,$$

wobei $f(a) := (-Ya, Xa)$ und $g(a,b) := (Xa + Yb)$.

(b) Benutzen Sie (z.B.) (4a), um zu zeigen, dass $\mathrm{Tor}_1^A(\mathfrak{m}, k) = k$ (bzw. isomorph), und somit ist $\mathfrak{m}$ kein flacher A-Modul.

$\leq$18 Punkte

(5) *"Going-down": geht in diesem Beispiel nicht.*
Seien $A := k[X,Y]$ ein Ring, $B := k[X,Y,Z]/(ZY - X)$ eine Ringerweiterung von A, $\mathfrak{p} := (X,Y)_A \subset A$ ein Primideal in A und $\mathfrak{P} := (Y,Z)_B \subset B$ ein Primideal in B.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{P}^c = \mathfrak{p}$, $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$.

(b) Setzen Sie $\mathfrak{p}' := (X - \alpha Y)_A$ für $\alpha \in k \setminus 0$. Dann gibt es kein Primideal $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, das $(\mathfrak{P}')^c = \mathfrak{p}'$ erfüllt.

$\leq$20 Punkte

Name: _____.

Matr.-Nr.: _____.

Aufgabennummer	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
_____ $= \sum$					

Maximale Bearbeitungszeit: 120 Min.

Zur (schon bekannten) Notation. Es wird, so wie in der Vorlesung, folgende Notation benutzt.

- Alle Ringe (A, B, k) sind kommutativ mit $1 \neq 0$.
- Die Buchstaben $I, J, \mathfrak{a}$ bezeichnen Ideale im Ring A; $\mathfrak{p}, \mathfrak{P}$ Primideale in A bzw. einer Erweiterung von A; $\mathfrak{m}, \mathfrak{M}$ maximale Ideale.
- Ist B eine A-Algebra mit Ringhomomorphismus $f : A \to B$, dann für $I \subset A$ ein Ideal, ist $I^{\mathrm{e}} = IB$ und für $J \subset B$ ist $J^{\mathrm{c}} = f^{-1}(J) = J \cap A$.
- B/A bezeichnet eine Ringerweiterung von A $(1_A = 1_B = 1)$ – in diesem Fall ist meistens der injektive Algebrenhomomorphismus $f : A \hookrightarrow B$ aus dem Kontext zu entnehmen.
- Für zwei beliebige Mengen W_1 und W_2 bezeichnet $W_1 \subset W_2$, dass $(w_1 \in W_1 \Rightarrow w_1 \in W_2)$ gilt.
- k ist ein Körper.
- Die k-Algebra $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ bezeichnet den freien Polynomring in n Unbestimmten (für kleines n, benutzen wir $X, Y, \ldots$ usw. anstelle von $X_1, X_2, \ldots$).

Zur Aufgabe (3). *Erinnerung*: Das Spektrum $\mathrm{Spec}(A)$ ist *unzusammenhängend*, wenn $\mathrm{Spec}(A) = V(I_1) \cup V(I_2)$, mit $V(I_1) \neq \varnothing \neq V(I_2)$ und $V(I_1) \cap V(I_2) = \varnothing$. Ein Element $a \in A$ heißt *Idempotent*, wenn $a^2 = a$ gilt.