DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT I

$\leq$27.4.2012

Allgemeiner, einmaliger Hinweis: Das obige Datum des Abgabetermins, hier der 27.4.2012, ist bis zum 11 Uhr gemeint – also, vor dem Vorlesungsbeginn.

(Die ersten zwei Übungen sind aus der Vorlesung.)

(1) (a) Ist $P \subset A$ ein Primideal, dann gilt: $xy \in P \Rightarrow x \in P$ oder $y \in P$.
(b) $\operatorname{nil} A = \bigcap_{P \text{ prim}} P$.
(c) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
(d) Ist $a \notin A^\times$, dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{M} \subset A$ mit $a \in \mathfrak{M}$.
(e) $a \in \operatorname{rad} A \Leftrightarrow 1 - ax \in A^\times$ für alle $x \in A$.

$\leq$5 Punkte

(2) (a) Geben Sie ein Beispiel eines irreduziblen Elementes, das nicht prim ist. (Aus dem Beispiel "$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist nicht faktoriell".)
(b) $k[X_1, X_2]$ ist kein Hauptidealring.
(c) Geben Sie ein Beispiel eines endlich erzeugten Moduls, der einen nicht endlich erzeugten Untermodul enthält.

$\leq$5 Punkte

(3) (a) Seien K, L, N drei Untermoduln von einem A-Modul M. Ist $L \subset K$, dann

$$K \cap (L + N) = L + (K \cap N).$$

(b) Seien M ein A-Modul und N ein Untermodul. Der Modul M erfüllt *acc* (bzw. *dcc*) genau dann, wenn es N und M/N erfüllen.[1]

$\leq$5 Punkte

(4) Seien M ein A-Moduln und N ein Untermodul. Dann gilt $l(M) = l(N) + l(M/N)$.

$\leq$4 Punkte

[1] Hinweis für "$\Leftarrow$": Benutzen Sie (3a) zu zeigen, dass $L = L'$ wenn $L \subset L', L + N = L' + N$ und $L \cap N = L' \cap N$. Vergessen Sie nicht die inklusionserhaltende Entsprechung zwischen Untermoduln von M/N und Obermoduln von N in M.