DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT X

$\leq$ 29.6.2012

(37) *Zu assoziierten Idealen.*

Seien $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen Noetherschen Ringen und M ein endlich erzeugter B-Modul. Dann ist $f^{\mathrm{c}}(\mathrm{ass}_B(M)) = \mathrm{ass}_A(M)$ ($f^{\mathrm{c}} : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$). Insbesondere, ist $\mathrm{ass}_A(M)$ endlich.

$\leq$3 Punkte

(38) *Zur Flachheit.*

Seien k ein Körper, $A := k[X^2, X^3]$ und $B := k[X]$. Dann ist B nicht flach über A. Beweisen Sie dies, z.B., indem Sie folgende exakte Sequenz von A-Moduln betrachten: $M_\bullet : 0 \to M_1 := A/(X^5, X^6) \xrightarrow{f} M_2 := A/(X^2) \oplus A/(X^3)$, mit $f(a \bmod (X^5, X^6)) := (a \bmod (X^2), a \bmod (X^3))$ (bzw. $M_\bullet \otimes_A B$ ausrechnen).

Zeigen Sie dann, dass ein A-Ring B nicht flach ist, wenn es zwei Ideale $I_1, I_2 \subset A$ gibt, mit $(I_1 \cap I_2)B \neq I_1B \cap I_2B$. Die Idee nimmt man aus dem Beispiel vorhin, wo in diesem Fall $I_1 := (X^2)$ und $I_2 := (X^3)$.

$\leq$4 Punkte

(39) *(Ko)Homologie und Flachheit.*

Sei A ein Ring und $M_\bullet$ ein Komplex von A-Moduln. Ist N ein flacher A-Modul, dann gilt $\mathbb{H}_i(M_\bullet) \otimes_A N = \mathbb{H}_i(M_\bullet \otimes_A N)$ für alle i.

$\leq$4 Punkte

(40) Tor *und Flachheit.*

Sei A ein Ring und B eine A-Algebra. Benutzen Sie die *Standard*eigenschaften des Tensorproduktes, um (einfach) zu zeigen, dass wenn M, N zwei A-Moduln sind, dann $(M \otimes_A N) \otimes_A B = (M \otimes_A B) \otimes_B (N \otimes_A B)$ gilt.

Sei nun weiterhin B flach über A. Dann gilt

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \otimes_A B = \mathrm{Tor}_i^B(M \otimes_A B, N \otimes_A B), \text{ für alle } i.$$

$\leq$4 Punkte