DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT XI

$\leq$ 6.7.2012

(41) *Zur Faser.*

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $A := k[x]$ und $B := k[x, y]$, wobei $y^2 = x^2(x+1)$[1], und $f : A \to B$ definiert durch $x \mapsto x$ (also, $f^c : \mathcal{C} := \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{A}^1_k := \mathrm{Spec}(A)$ ist die Projektion auf die Gerade).

Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ein Punkt im Bild von f^c, der nicht 0 oder -1 entspricht (also $\mathfrak{p} \neq (x), (x+1)$). Dann rechnen Sie die Faser $(f^c)^{-1}(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ aus, in dem Sie $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$ ausrechnen – cf. Proposition III.1.3 aus der Vorlesung.[2]

$\leq$4 Punkte

(42) *Zur topologischen Gruppen.*

(a) Seien $G = (G, \cdot)$ eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G. Folgende sind äquivalent:

(i) $\cdot : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ und $()^{-1} : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, sind stetig;

(ii) $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2^{-1}$ ist stetig.

(b) Sei U eine offene Umgebung der Identität einer topologischen Gruppe $G = (G, \cdot)$. Dann gibt es eine offene Umgebung V der Identität, die $V \cdot V \subset U$ erfüllt.

(c) Sie $G = (G, \cdot)$ eine topologische Gruppe und H eine normale Untergruppe. Dann die Quotientengruppe G/H ist eine topologische Gruppe vermöge der Quotiententopologie.

$\leq$5 Punkte

(43) *Zur Vervollständigung.*

Sie $\mathcal{U}_0 := \{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von normalen Untergruppen einer Gruppe G, mit $G_{\lambda'} \subset G_\lambda$ für alle $\lambda \leq \lambda'$ (also Λ orientiert). Wir haben gesehen, dass $\widehat{G}^{\mathcal{U}_0} =: \widehat{G}$ eine topologische Gruppe ist (diese Topologie bezeichnen wir mit $\widehat{\mathcal{T}}_0$). Mit $\pi_\lambda : \widehat{G} \to G/G_\lambda$ bezeichnen wir die kanonischen Projektionen und $G'_\lambda := \mathrm{Ker}(\pi_\lambda)$. Dann, zeigen Sie, dass die durch $\widehat{\mathcal{U}}_0 := \{G'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ induzierte Topologie auf $\widehat{G}$, dieselbe ist, wie $\widehat{\mathcal{T}}_0$.

Weiterhin, zeigen Sie, dass

$$\widehat{\widehat{G}^{\mathcal{U}_0}}^{\widehat{\mathcal{U}}_0} = \widehat{G}^{\mathcal{U}_0}.$$

Dies folgt aus $\widehat{G}^{\mathcal{U}_0}/G'_\lambda \cong G/G_\lambda$.

$\leq$5 Punkte

[1] Vorsicht, denn in der Vorlesung hatten wir keinen Namen für $k[x]$ und A bezeichnete in dem Fall den affinen Ring der nodalen Kurve $\mathcal{C}$.

[2] Nach einigen Identifizierungen, bekommen Sie einen Ring, der Isomorph zum Produkt von zwei Körpern...

(44) *Ein Beispiel (nochmal).*

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ (bzw. $\mathbb{Q}_p$) eine (bzw. lokal-)kompakte, abelsche, topologische Gruppe ist.

$\leq$4 Punkte