DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT XII

$\leq$ 13.7.2012

(45) *Vollständige Ringe.*

Seien A ein Noetherscher Ring, $I, J \subset A$ zwei Ideale mit $J \subset I$. Benutzen Sie Cauchy-Folgen, um zu zeigen, dass wenn der Ring A I-adisch vollständig ist, dann ist er auch J-adisch vollständig.

$\leq$3 Punkte

(46) *Dies und jenes "aus der Vorlesung".*

(a) Sei A ein Ring versehen mit einer (sog.) linearen Topologie, der von $\mathcal{U}_0^A := \{I_n\}_{n\geq 1}$ induziert ist[1], wo die I_n's Ideale sind. Zeigen Sie, dass bzgl. dieser Topologie, die Multiplikation in A stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass 5 eine (und dann zwei) Quadratwurzel in $\mathbb{Z}_{11}$ hat, aber keine in $\mathbb{Z}_7$.

(c) Seien A ein Ring, M ein A-Modul, $N \subset M$ ein Untermodul und $\mathcal{U}_0^M := \{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Umgebungen um die Null. Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie auf M/N dieselbe ist, wie die von $\mathcal{U}_0^{M/N} := \{\pi(M_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ Induzierte, wobei $\pi : M \to M/N$ die kanonische Projektion ist.

$\leq$3 Punkte

(47) *Zwei Vervollständigungen.*

Seien $\iota_n : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Gruppeninklusionen $\iota_n(1) := p^{n-1}$ für $n \geq 1$, und $\iota := \oplus_{n\geq 1}\iota_n : G := \oplus_{n\geq 1}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G' := \oplus_{n\geq 1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass G p-adisch vollständig ist[2], aber die Vervollständigung von G bzgl. der auf G induzierten p-adischen Topologie von G' gleich dem direkten Produkt $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

Insbesondere, ist der Funktor *"Vervollständigung"* nicht recht-exakt.

Warum widerspricht dies nicht unserem Theorem III.2.1? Denn, in diesem Beispiel ist die gerichtete Menge Λ schon gleich $\{1, 2, \ldots\}$...

$\leq$5 Punkte

(48) *Zu Hensels Lemma.*

(a) Wir benutzen hier die Notation von Theorem III.2.3 (*Hensels Lemma*). Seien $(A, \mathfrak{M}, k)$ ein vollständiger, lokaler Ring, und $F \in A[T]$ ein normiertes Polynom, mit $f := F \bmod \mathfrak{M}[T]$. Hat f eine einfache Nullstelle a_0 in k, dann hat F eine einfache Nullstelle $a \in A$, so dass $a \bmod \mathfrak{M} = a_0$.

(b) Seien k ein Körper $f(T, T') \in k[T, T']$, so dass $g(T') := f(0, T')$ eine einfache Nullstelle $a_0 \in k$ hat. Dann gibt es eine formelle Potenzreihe $h \in k[[T]]$, so dass $f(T, h(T)) = 0$.[3]

Die Potenzreihe h heißt der *analytische Zweig* der Kurve $\mathcal{C} : f = 0$ bei $(0, a_0)$.

$\leq$4 Punkte

[1] Alle Mengen der Form $\mathcal{U}_0^\star$ sind mit den Bedingungen aus der Vorlesung zu verstehen.

[2] Die Gruppen sind als $A = \mathbb{Z}$-Moduln zu betrachten mit $I = (p)$ als Ideal, wo p eine Primzahl ist.

[3] Betrachten Sie hier $f \in A[T']$, wobei $A = k[[T]]$.