DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT XIII

$\leq$ 20.7.2012

(49) *Zwei wichtige und elementare Eigenschaften von ganzen Erweiterungen.*

(a) Sei B/A eine ganze Ringerweiterung, dann $\dim A = \dim B$.

(b) Seien B/A eine endlich erzeugte, ganze Erweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gibt es endlich viele Primideale $\mathfrak{P} \subset B$ über $\mathfrak{p}$ (d.h. mit $\mathfrak{P}^c = \mathfrak{p}$).

$\leq$4 Punkte

(50) *Erste Übungen zur ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$.*

Seien $A := \mathbb{Z}$ und $B := \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, wobei $D \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie Zahl ist.

(a) Berechnen Sie den ganzen Abschluss $\tilde{A}$ von A in B, nämlich, dass

$$\tilde{A} = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{D}] & \text{falls } D \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D}}{2}] & \text{falls } D \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

(b) Nun, $\tilde{A}/A$ ist eine ganze Ringerweiterung, und demnach gibt es für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $A = \mathbb{Z}$ (also $\mathfrak{p} = (p)$ mit p eine Primzahl in $\mathbb{Z}$) ein Primideal $\mathfrak{P}$ in $\tilde{A}$ über $\mathfrak{p}$. Beschreiben Sie die Faser über $\mathfrak{p} = (p)$ für p eine ungerade Primzahl (bzw. die Menge der Primideale in $\tilde{A}$, die über $\mathfrak{p}$ liegen).[1]

$\leq$6 Punkte

(51) *Überbleibsel (4) aus der Vorlesung.*

Zeigen Sie, dass die Kurve $\tilde{\mathcal{C}} := \operatorname{Spec}(\tilde{A} := k[x, y, y/x])$ die Normalisierung der nodalen Kurve $\mathcal{C} := \operatorname{Spec}(k[x, y])$ ist, wobei $y^2 = x^2(x+1)$ – also, dass $\tilde{A}$ der ganze Abschluss von A im Quotientenkörper ist.[2]

$\leq$3 Punkte

(52) *Zur Normalisierung.*

(a) Sei B/A eine Ringerweiterung. Dann ist A ganz abgeschlossen in B, genau wenn $A[X]$ ganz abgeschlossen in $B[X]$ ist.[3]

(b) Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist A normal, genau wenn $A[X]$ normal ist.[4]

$\leq$6 Punkte

---

[1] Studieren Sie den Quotientenring $\tilde{A}/\mathfrak{p}\tilde{A}$ (der eigentlich sich beschreiben lässt unabhängig von der Kongruenzklasse $D \mod 4$). Für $\mathfrak{p} = (2)$ ist dies nicht der Fall, und deswegen gibt es weitere Fallunterscheidungen.

[2] Wie im Beispiel in der Vorlesung, schreiben Sie $\tilde{A} = k[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2(X+1), Z^2 - (X+1))$, und dann schreiben Sie einen Ringisomorphismus von $k[z]$ zu $\tilde{A}$ (d.h. wir parametrisieren die Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$ was zumindest anschaulich mit der Z-Achse gehen sollte, nicht wahr?). Aber $k[z]$ ist schon ganz ab..

[3] O.B.d.A. darf man annehmen, dass A Noethersch ist (bzw. endlich erzeugt über $\mathbb{Z}$)... Sei nun, $P \in B[X]$, dann betrachten wir den $A[X]$-Modul $M := A[X][P] \subset B[X]$ (hier ist P ganz über $A[X]$ vorausgesetzt)... Zeigen Sie dann, dass $\operatorname{coeff}(M) := \{a \in B \mid a \text{ ist Koeffizient eines Elements aus } M\} \subset B$ ein endlich erzeugter A-Modul ist. Jetzt zeigen Sie per Induktion über den Grad von P, dass P Koeffizienten in A haben muss.

[4] Hierfür benutzen Sie (52a) mit $B := \operatorname{Quot}(A)$.