DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT XIV

$\leq$ 27.7.2012

(53) *Überbleibsel (5) aus der Vorlesung.*

(a) Berechnen Sie die ersten drei Terme der 11-adischen Entwicklung einer Quadratwurzel von 5, d.h. a_0, a_1, a_2, wobei $(\sum_{j\geq 0} a_j 11^j)^2 = 5$ in $\mathbb{Z}_{11}$.

(b) Berechnen Sie den Rang einer Bewertung mit Wertegruppe $(\mathbb{Z}^n, +, \leqslant)$, wobei $\leqslant$ die lexikographische Ordnung bezeichnet.

$\leq$4 Punkte

(54) *Zu Idealen in Bewertungsringen.*

Seien A ein Bewertungsring und $K = \mathrm{Quot}(A)$.

(a) Jedes endlich erzeugte Ideal in A ist ein Hauptideal.

(b) Die Menge der A-Moduln in K ist total geordnet.[FN1]

$\leq$4 Punkte

(55) *Eine Bewertung höheren Ranges: ein neuer Versuch!*

Sei Γ eine total geordnete, additive, abelsche Gruppe, k ein Körper. Setzen wir $\Gamma_+ := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > 0\}$, und $A_+ := k[X^\gamma \mid \gamma \in \Gamma_+]/(X^\gamma X^{\gamma'} - X^{\gamma\gamma'})$ die k-Algebra, die durch die positiven Elemente von Γ erzeugt wird und K deren Quotientenkörper.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Abbildung $v_+ : A_+ \setminus 0 \to \Gamma$ sich eindeutig zu einer Bewertung v von K fortsetzen lässt, mit Wertegruppe $\Gamma_v = \Gamma$.

$$v_+\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma_+} \lambda_\gamma X^\gamma\Big) := \min_{\gamma\in\Gamma_+}\{\gamma \mid \lambda_\gamma \neq 0\}.$$

(b) Bezeichnen wir dann mit $A = A_v$ den zugehörigen Bewertungsring von v in K, mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_v$ das maximale Ideal und mit $k_v = A/\mathfrak{M}$ den Quotientenkörper. Zeigen Sie, dass $k_v \cong k$, indem Sie beweisen, dass $A \cong k \cdot 1_A \oplus \mathfrak{M}$.[FN2]

(c) Für den Fall $\Gamma := (\mathbb{Z}^2, +, \leqslant)$, mit $\leqslant$ die lexikographische Ordnung, berechnen Sie explizit $\mathfrak{M}$[FN3] sowie die Krull-Dimension von A.

$\leq$0 Punkte[FN4]

(56) *Eine archimedische (u. diskrete) Bewertung.*

Seien A ein Ring, $K := \mathrm{Quot}(A)$, k ein beliebiger Körper und $v(a) := l(A/(a)) \in \mathbb{Z} =: \Gamma$, für $a \in A \setminus 0$ (hier $l(M)$ ist die Länge von M). Dann induziert v keine Bewertung, wenn $A := k[X]$, aber schon eine, wenn $A := k[X]_{(X)}$.

$\leq$4 Punkte

[FN1] Wie schon angedeutet, benutzen Sie $\varinjlim$, um die Moduln als direkter Limes von endlich erzeugten darzustellen...

[FN2] Jedes Element x aus K mit Bewertung Null lässt sich schreiben als $\frac{\alpha+f}{\beta+g}$, mit f, g in dem Primideal $\mathfrak{p} := \langle X^\gamma \mid \gamma \in \Gamma_+\rangle_{A_+} \subset A_+$. Dann $x = \alpha\beta^{-1} + (\beta f - \alpha g)\beta^{-1}(\beta+g)^{-1}$ und $v(x - \alpha\beta^{-1}) > 0$, und $x \equiv \alpha\beta^{-1} \pmod{\mathfrak{M}}$.

[FN3] D.h. geben Sie eine genaue Beschreibung solcher Elementen von K, die darin liegen... dann kann man, zumindest in diesem Fall $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, direkt "sehen", wie die Zerlegung von A aus (55b) durch die Auswertungabbildung bei $(0,0)$ zu stande kommt – diese nimmt Werten in $\mathbb{P}^1_k = k \cup \{\infty\}$, und das Urbild von k bzgl. dieser Auswertung ist gerade $k \cdot 1_A$.

[FN4] Die ursprünglich falsch gestellte Aufgabe aus einem (Ex. 11.4, GTM150) ist nicht mehr zu retten!