DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT II

$\leq$ 4.5.2012

(5) (a) Sei A ein Ring und $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in A, so dass $I_1 \cap \ldots \cap I_n = 0$. Ist jeder Quotientenring A/I_i Noethersch für $i = 1, \ldots, n$, dann ist A Noethersch.

(b) Seien A, B, C Ringe, $f : A \to C$ und $g : B \to C$ surjektive Ringhomomorphismen. Sei $A \times_C B := \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ der *Faserprodukt*ring (Unterring vom Produktring $A \times B$). Sind A und B Noethersch, dann ist $A \times_C B$ Noethersch.[1]

$\leq$4 Punkte

(6) (a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, falls m und n teilerfremd sind.

(b) Sei $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von A-Moduln. Dann $\oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ ist flach genau dann, wenn jeder A-Modul M_λ flach ist – woraus folgt, dass $A[X]$ eine flache A-Algebra ist.

(c) Zeigen Sie, dass N flach ist, genau dann wenn Folgendes gilt: ist $0 \to M_1 \to M_2$ exakt, mit M_1 und M_2 endlich erzeugte A-Moduln, dann ist $0 \to M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N$ exakt.

$\leq$5 Punkte

(7) (a) Seien A, B zwei Ringe, M ein A-Modul, L ein B-Modul und N ein (A, B)-Bimodul (d.h. N ist sowohl ein A- als auch ein B-Modul, und $a(yb) = (ay)b$ für alle $a \in A$, $b \in B$ und $y \in N$). Dann ist $M \otimes_A N$ ein B-Modul ($(x \otimes y)b = x \otimes (yb)$) und analog ist $N \otimes_B L$ ein A-Modul, so dass $(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L)$.

$\leq$5 Punkte

(8) (a) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierten Abbildungen h und h' (cf. Theorem 52) zu einander invers sind.[2]

(b) Zeigen Sie, dass jeder Ring direkter Limes Noetherscher Ringe ist.

$\leq$4 Punkte

[1] Hinweis: Benutzen Sie (5a).

[2] Sollten Sie die Notizen nicht dabei haben, dann beweisen Sie Theorem 52: der direkte Limes kommutiert mit dem Tensorprodukt, d.h. $(\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N = \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N)$.