DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT III

$\leq$ 11.5.2012

(9) *Zu inversen Limites.*

(a) Gilt $(\varprojlim M_\lambda) \otimes_A N = \varprojlim (M_\lambda \otimes_A N)$, für M_λ, N A-Moduln (für alle $\lambda \in \Lambda$), und $(M_\lambda, (f_{\lambda'\lambda}))_{\lambda \leq \lambda' \text{ in } \Lambda}$ ein projektives System?

(b) Zeigen Sie, dass $\varprojlim$ linksexakt ist.

$\leq$4 Punkte

(10) *Weiterhin Limites und Flachheit.*

(a) Ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul für $n \geq 2$?

(b) Unter Benutzung von in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften des direkten Limes, zeigen Sie, dass $\varinjlim M_\lambda$ flach ist, wenn jeder A-Modul M_λ flach ist.

(c) Der Ring der p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p := \widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ ist ein Integritätsbereich, der den Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ umfasst. Zeigen Sie auch noch, dass $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}_p$. (Sie können z.B. eine Darstellung vom Ring $\mathbb{Z}_p$ finden, als der Ring der formalen Potenzreihen $\sum_{n \geq 0} a_n p^n$ mit $0 \leq a_n < p$ – d.h. einen Ringisomorphismus zwischen diesen beiden Ringen zu konstruieren.)

$\leq$4 Punkte

(11) *Weitere Beispiele von (nicht) flachen Moduln.*

(a) Seien $A = k[X_1, X_2]$, k ein Körper. Seien $I_i := (X_i)$ für $i = 1, 2$ zwei Ideale in A. Als A-Moduln sind sie frei und der Durschnitt $I_1 \cap I_2 = (X_1 X_2)$ auch. Zeigen Sie, dass $I := I_1 + I_2$ torsionsfrei aber nicht flach ist.

(b) Sei $A = k[t]$. Zeigen Sie, dass $B_1 = A[X]/(tX - t)$ und $B_2 = A[X]/((X) \cap (X, t)^2)$ keine flache A-Modul sind.

$\leq$4 Punkte

(12) *Projektive Moduln*

(a) Ein projektiver Modul ist flach[1]. Ist A ein Integritätsbereich aber kein Körper, dann ist der Quotientenkörper $K := \mathrm{Quot}(A)$ ein flacher A-Modul, der nicht projektiv ist.[2]

(b) Sei A ein lokaler Ring. Ist M endlich erzeugt[3] und projektiv, dann ist M frei. (NAK)

$\leq$3 Punkte

(13) *Bass' Charakterisierung Noetherscher Ringe.*

(a) Das direkte Produkt injektiver Moduln ist injektiv.

(b) Die direkte Summe injektiver Moduln ist injektiv genau dann, wenn der Ring A Noethersch ist.

[1] Ist M endlich erzeugt, dann gilt für M die Umkehrung – dies werden wir im späteren Verlauf der Vorlesung sehen.

[2] Welche A-lineare Abbildungen $K \to A$ sind möglich?

[3] Endlich-Erzeugbarkeit braucht man nicht, dafür aber einen anderen Beweis...

Hinweis: Das Bild jedes Homomorphismus von einem endlich erzeugten Modul in eine unendliche direkte Summe liegt in einer *endlichen* Summe.
Wenn A Noethersch ist, ist die direkte Summe injektiver Modul injektiv nach "*Baers* Resultat" (Korollar 61). Umgekehrt, für eine steigende Kette von A-Idealen $I_0 \subset I_1 \subset \ldots$ mit $I_\infty := \cup_{i\geq 0} I_i$. Man bettet I/I_i in einen injektiven A-Modul E_i ein (cf. Korollar 65), und erweitert man den Homomorphismus $I \to \bigoplus_{i\geq 0} E_i$ auf A.

$\leq$4 Punkte