DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT V

$\leq$ 25.5.2012

(18) *Zu Homotopien.*

Sei $M_\bullet := (M_\bullet, d_\bullet)$ ein Komplex von A-Moduln von Grad $r = -1$ (nicht unbedingt beschränkt).

- $M_\bullet$ heißt <u>*azyklisch*</u> $:\Leftrightarrow \mathbb{H}_n(M_\bullet) = 0$ für alle $n \geq 0$.
- $M_\bullet$ heißt <u>*split*</u> $:\Leftrightarrow \exists\, s_n : M_n \to M_{n+1}$, so dass $d_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} = d_{n+1}$ (kurz $d = dsd$) für alle $n \geq 0$.
- $M_\bullet$ heißt <u>*split exakt*</u> $:\Leftrightarrow M_\bullet$ azyklisch und split ist.

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Für $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, der Komplex

$$M_\bullet : \quad \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

ist azyklisch aber nicht split exakt.

(b) Ist $M_\bullet$ ein azyklischer Kettenkomplex von freien A-Moduln, dann ist er split exakt. Gilt dies, wenn die A-Moduln des Kettenkomplexes nicht unbedingt frei, aber projektiv sind?

$\leq$5 Punkte

(19) *Lokalisierung.*

Seien $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \setminus 0$.

(a) Ist $a > 1$ eine ganze Zahl und $M := \oplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/a^n\mathbb{Z}$. Dann ist M ein treuer A-Modul ($\mathrm{ann}_A(M) = 0$) und $M_S = 0$.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines $\mathbb{Z}$-Moduls M, der $\mathrm{ann}_A(M) = 0$ und $\mathrm{ann}_{A_S}(M_S) = \mathbb{Q}$ erfüllt.

$\leq$5 Punkte

(20) *Auch zur Lokalisierung.*

Zeigen Sie, dass *der Funktor* "Lokalisierung" exakt ist. Konkret: sei A ein Ring und $S \subset A$ eine multiplikative Menge. Der Funktor schickt einen A-Modul M auf M_S, und einen A-Modulhomomorphismus $f : M \to N$ auf $f_S : M_S \to N_S$, gegeben durch $f_S(m/s) := f(m)/s$. Mit dieser Definition, beweisen Sie die Exaktheit des *Lokalisierungsfunktors*:

Ist $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist $0 \longrightarrow L_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} N_S \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von A_S-Moduln (Theorem II.4 aus der Vorlesung könnte hilfreich sein).

$\leq$4 Punkte

(21) *Zum Spektrum eines Ringes*

(a) Zeigen Sie, dass die Untermengen $V(I)$ von $\mathrm{Spec}(A)$ für $I \subset A$ ein Ideal eine Basis einer Topologie (der *Zariski* Topologie) bilden, die diese als abgeschlossene Menge hat. Genauer:

(i) $V(I) \cup V(I') = V(I \cap I) = V(II')$, und

(ii) $\cap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

(b) Beschreiben Sie $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{Spec}(k)$ und $\mathrm{Spec}(\bar{k}[X])$ für k ein Körper und $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluss von k.

(c) Ist $I \subset A$ ein Ideal vom Ring A. Dann ist $\mathrm{Spec}(A/I)$ homöomorph zur abgeschlossenen Menge $V(I)$ (in $\mathrm{Spec}(A)$) (betrachten Sie π^{c} für π die kanonische Projektion $A \to A/I$).

$\leq$6 Punkte