DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT VIII

$\leq$ 15.6.2012

(29) *Zu Jacobson-Ringen.*

Sei A ein Ring. Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(a) Jedes Primideal ist Durchschnitt von maximalen Idealen.

(b) Das Radikal und das Nilradikal des Bildes von A unter jedem Algebrenhomomorphismus sind gleich.

(c) Jedes Primideal in A, das nicht maximal ist, ist gleich dem Durchschnitt aller Primideale, die dieses echt enthalten.

Ein solches Ring heißt *Jacobson-Ring.*[1] $\leq$4 Punkte

(30) *Mehr zu Jacobson-Ringen.*

Sei B eine nullteilerfreie, endlich erzeugte A-Algebra (insb. B ist ein Quotient von $A[X_1, \ldots, X_n]$). Wir nehmen an, dass in diesem Fall folgendes gilt: $\operatorname{rad} A = 0 \Longrightarrow \operatorname{rad} B = 0$[2]. Beweisen Sie unter Benutzung dieser Annahme, dass wenn A ein Jacobson-Ring ist, dann ist B auch Jacobson.[3] $\leq$1 Punkt

(31) *Zu Hilbertschem Nullstelensatz* [AM, Chapter 1, Exercises 27-28].

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $A := k[X_1, \ldots, X_n]$ die freie k-Algebra vom Transzendenzgrad n, und $\Phi \subset A$ eine Untermenge. Dann $N(\Phi) := \mathrm{Nst}_k(\Phi) \subset k^n$ heißt *affine, algebraische Varietät* (die durch Φ definiert ist). Jede solche affine, algebraische Varietät X hat ein Ideal $I(X)$ von A assoziiert, das durch $I(X) := \{f \in A \mid f(\underline{\alpha}) = 0 \text{ für alle } \alpha \in X\}$ gegeben ist. Der Quotientenring $A(X) := A/I(X)$ ist die Algebra der *polynomialen Funktionen* auf X (denn zwei polynomiale Funktionen f, g auf X sind gleich, genau dann, wenn $f - g$ auf X verschwindet, also, wenn $f - g$ in $I(X)$ liegt).

Eine Polynomiale Abbildung von k^n nach k^m ist eine Abbildung φ der Form $\varphi(\underline{\alpha}) = (f_1(\underline{\alpha}), \ldots, f_m(\underline{\alpha}))$, wobei $f_i \in A$ für $i = 1, \ldots, m$. Seien $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ zwei affine, algebraische Varietäten. Eine *reguläre Abbildung* $\phi : X \to Y$ ist eine Funktion, die durch Restriktion einer polynomialen Abbildung von k^n nach k^m gegeben ist.

Beweisen Sie, dass es eine Korrespondenz gibt ($1-1$-Entsprechung) zwischen regulären Abbildungen $X \to Y$ und k-Algebrenhomomorphismen $A(Y) \to A(X)$, gegeben durch:

für $\phi : X \to Y$ eine reguläre Abbildung, dann ist der entsprechende Algebrenhomomorphismus $\phi^\star : A(Y) \to A(X)$, mit $\phi^\star(f) := f \circ \phi$. $\leq$4 Punkte

(32) *Ein konkretes Beispiel: Homeöomorphismen zwischen algebraischen Varietäten sind nicht unbedingt Isomorphismen.*

---

[1] Nur 29c$\Rightarrow$29b ist nicht einfach. Vgl., wenn nötig, [AM, Seite 71, Exercise 23] für einen Hinweis – wo auch die Übung herkommt.

[2] Es wird eine Übungsaufgabe später sein!

[3] Dies verallgemeinert Korollar II.24 der heutigen Vorlesung.

Mit maximal einem Punkt bei dieser Aufgabe möchte ich hier erreichen, dass Sie zunächst einmal alle anderen Aufgaben bearbeiten, bevor Sie sich mit dieser Aufgabe beschäftigen.

(a) Seien $X = k$ und $Y \subset k^2$ gegeben durch $Y := N(X_2^2 - X_1^3)$, und $\phi : X \to Y$ die Abbildung $t \mapsto (t^2, t^3)$. Zeigen Sie, dass ϕ ein bijektiver, (stetiger) abgeschlossener Morphismus ist. Dieser Morphismus ϕ ist aber kein Isomorphismus (d.h. die inverse Abbildung ist *kein* Morphismus).

(b) Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist $\phi : X = k \to Y = k$ gegeben durch $t \mapsto t^p$ ein bijektiver, (stetiger) abgeschlossener Morphismus, der kein Isomorphismus ist. Dieser heißt der *Frobenius Morphismus*.

$\leq$4 Punkte

LITERATUR

[AM] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1969.