DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

ÜBUNGSBLATT IX

$\leq$ 22.6.2012

(33) *Überbleisel (1) aus der Vorlesung.*

Sei A ein Ring.

(a) Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l \subset A$ Ideale, $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal.
Ist $\mathfrak{p} \supset \cap_{i=1}^{l} \mathfrak{a}_i$ $(\star)$, dann gibt es ein $i_0 \in \{1, \ldots, l\}$, so dass $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_{i_0}$. Gilt bei $(\star)$ sogar Gleichheit, dann ist $\mathfrak{p}$ eins von den $\mathfrak{a}_i$'s.

(b) Sei $I \subset A$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal, und $a \in A \setminus \mathfrak{p}$. Dann gilt $(I : a) = I$.

(c) Seien $S \subset A$ eine multiplikative Menge und $I \subset A$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal, so dass $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$ gilt. Dann ist $S^{-1}I = I^{\mathrm{e}}$ ein $S^{-1}\mathfrak{p}$-primäres Ideal, das $(I^{\mathrm{e}})^{\mathrm{c}} = I$ erfüllt.

$\leq$5 Punkte

(34) *Überbleisel (2) aus der Vorlesung.*

Seien A ein Noetherscher Ring und $I \subset A$ ein zerlegbares[1] Ideal. Dann gilt

$$\mathrm{ass}_A^{\mathrm{Rg}}(I) = \mathrm{ass}_A(A/I).$$

$\leq$3 Punkte

(35) *Zu assoziierten Primidealen.*

(a) Sei $A = \mathbb{Z}$ und M ein endlich erzeugter A-Modul. Benutzen Sie den Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen, um $\mathrm{ass}_A(M)$ auszurechnen. (Fangen Sie z.B. mit $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ an, für p eine Primzahl und $e = 1$, dann ...)

(b) In $A = k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, sei $I := (X_0) \cdot (X_0, X_1) \cdot \cdots \cdot (X_0, \ldots, X_n)$. Dann ist $\mathrm{ass}_A(I) = \{(X_0), (X_0, X_1), \ldots, (X_0, \ldots, X_n)\}$.[2]

$\leq$4 Punkte

(36) *Zu primären Zerlegungen.*

(a) Sei $A = k[x, y]$ eine endlich erzeugte k-Algebra, mit definierendem Ideal $I_{\mathrm{d}} := (X^2, XY) = (X) \cap (X, Y)^2$ (d.h. die Projektion $k[X, Y] \longrightarrow A$, wo $X \mapsto x$ und $Y \mapsto y$ hat I_{d} als Kern). Setzen $I_n := (y^n)$ und $\mathfrak{p} := (x, y)$.
Das Ideal I_n ist ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal in A, und $(x) \cap I_n = 0$ ist eine minimale primäre Zerlegung von (0) in A für jedes $n \geq 1$.

(b) Seien $A = k[X, Y, Z]$ eine freie k-Algebra, $\mathfrak{p}_1 := (X, Y)$, $\mathfrak{p}_2 := (X, Z)$ und $\mathfrak{m} := (X, Y, Z)$, $I := \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$; wo die $\mathfrak{p}_i$'s prim sind und $\mathfrak{m}$ maximal. Zeigen Sie, dass $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ eine minimale primäre Zerlegung von I ist. Welche assoziierte Ideale sind isoliert? Welche eingebettet?

$\leq$4 Punkte

[1] Wie schon angekündigt, ab ko. Mittwoch wird diese zusätzliche Forderung überflüssig sein.

[2] Induktion über n beim Lokalisieren nach X_n.