DR. J. M. CERVIÑO
N. RUNGTANAPIROM

SS 2012

ALGEBRA II

EXTRA–ÜBUNGSBLATT

$\leq$ 1.6.2012

(E1) *Weitere Beispiele zur Lokalisierung von Moduln.*

Sei k ein Körper und $M := k[X]/(X^3 - X^2)$ ein Modul über dem Polynomring $k[X]$. Bestimmen Sie die Lokalisierung M_S für

(a) $S := k[X] \setminus (X)$;

(b) $S := \{X^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

$\leq$3 Punkte

(E2) *Nochmals zum Spektrum eines Ringes.*

Seien $I, J \trianglelefteq A$ Ideale eines Ringes A. Zeigen Sie die äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $V(I) \subseteq V(J)$.

(b) $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

(c) $J \subseteq \sqrt{I}$.

$\leq$2 Punkte

(E3) *Polynomringe in mehreren Variablen.*

Sei k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $a := (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$. Zeigen Sie: Zu jedem Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gibt es Polynome $g_1 \in k[X_1], g_2 \in k[X_1, X_2], \ldots, g_n \in k[X_1, \ldots, X_n]$, so dass

$$f = (X_1 - a_1)g_1 + \cdots + (X_n - a_n)g_n + f(a_1, \ldots, a_n).$$

Folgern Sie:

(i) $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ist genau dann eine Nullstelle des Polynoms $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, wenn $f \in \mathfrak{m}_a := (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$.

(ii) $\mathfrak{m}_a \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ist ein maximales Ideal.

(b) Sei k ein *unendlicher* Körper und $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass f genau dann das Nullpolynom ist, wenn für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ gilt: $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

$\leq$5 Punkte

(E4) *Die Lokalisierung „sieht die anderen Komponenten nicht!“.*

Sei A ein Ring und $I, J \trianglelefteq A$ Ideale. Weiter seien

$$\pi_I : A \twoheadrightarrow A/I,\ a \mapsto [a]_I \quad \text{und} \quad \pi_{IJ} : A \twoheadrightarrow A/IJ, a \mapsto [a]_{IJ}$$

die kanonischen Projektionen. Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{p} \in V(I) \setminus V(J)$, so induziert die kanonische Projektion $A/IJ \twoheadrightarrow A/I, [a]_{IJ} \mapsto [a]_I$ den Ringisomorphismus

$$(A/IJ)_{\pi_{IJ}(\mathfrak{p})} \cong (A/I)_{\pi_I(\mathfrak{p})}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass für alle $a \in A$ wegen $I \subseteq \mathfrak{p}$ gilt: $a \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow [a]_I \in \pi_I(\mathfrak{p})$.

$\leq$4 Punkte