Universität Duisburg-Essen SS 2007

# Arbeitsgemeinschaft
# Einführung in die Theorie der Automorphen Formen

Organisation: Pedro Luis del Angel, Gebhard Böckle, Juan Cerviño, Gabor Wiese
Zeit und Ort: Do 10–12 c.t., T03 R02 D82.

## Seminarprogramm

Im optimistischsten Fall hat das Seminars die folgenden Ziele:

(1) Beschreibung des Übergangs von klassischen (kuspidalen Hecke-Eigen-) Modulformen $f$ zu adelischen automorphen Formen und automorphen Darstellungen $\pi_f$.

(2) Beschreibung der automorphen Darstellungen für $\mathrm{GL}_2(K)$, $K$ ein lokaler Körper, und Beschreibung der Faktoren $\pi_v$ in $\pi_f = \otimes_v \pi_v$ an 'unverzweigten' Stellen $v$ durch lokale Eigenschaften der Spitzenform $f$.

(3) Die Spurformel für kompakte Quotienten $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.

(4) Die Spurformel für $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ für Kongruenzuntergruppen und die JL-Korrespondenz zwischen $\mathrm{GL}_2$ und der Einheitengruppe von Quaternionenalgebren über $\mathbb{Q}$.

### Automorphe Formen und Darstellungen: lokal und global

05.+12.04.07 **1. Klassische und automorphe Formen und Darstellungen**

Dieser Vortrag könnte sich an [Ro2], §1, orientieren. Sei $\omega$ ein Heckecharakter von $\mathbb{Q}$. Zunächst wird für $G = \mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ die unitäre Darstellung von $G(\mathbb{A})$ auf $L^2(\omega) := L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \omega)$ eingeführt, sowie die Unterdarstellung $L^2_0(\omega)$ auf *kuspidalen* Funktionen. Analog erhält man für eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, für welche $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ein endliches Volumen besitzt, Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf $L^2(\Gamma) = L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ und $L^2_0(\Gamma)$. Für $\Gamma = \Gamma_1(N)$ ergibt sich eine natürliche Abbildung $L^2(\Gamma, \omega) \hookrightarrow L^2(\omega)$, welche Kuspidalität erhält. Klassische Modulformen lassen sich (in Abhängigkeit vom Gewicht) so twisten, dass sie in $L^2(\Gamma, \omega)$ zu liegen kommen. Hauptgegenstand der Theorie der automorphen Formen und Darstellungen ist die Untersuchung von $L^2(\omega)$ mit Hilfe der Spektraltheorie des Laplace-Operators und der Darstellungstheorie von $\mathrm{GL}_2$ auf im allgemeinen unendlich-dimensionalen Vektorräumen. Dies hat vielfältige Konsequenzen für die klassische Theorie von Modulformen.

Das algebraische Pendant zu $L^2_0(\omega)$ ist der Raum $\mathcal{A}_0(\omega)$ der **kuspidalen automorphen Formen**, der ebenfalls eingeführt werden soll. Dieser wird insbesondere in Bumps Buch, [Bu], ausführlich untersucht. Hierzu benötigt man den Laplace-Operator auf $G(\mathbb{R})$ sowie das Konzept der '$K$-Endlichkeit', welches von der Wahl einer maximal-kompakten Untergruppe von $G(\mathbb{R})$ abhängt.

Es können nun die Inhalte einiger Vorträge erläutert werden. Stichworte sind: Die Zerlegung von $L^2_0(\omega)$ als direkte Summe irreduzibler (und Konsequenzen für

$\mathcal{A}_0(\omega)$). Glatte und Zulässige Darstellungen und Heckealgebren. Der Tensorproduktsatz. Multiplizität Eins und Whittakermodelle. Die Zerlegung von $L^2(\omega)$ und Eisensteinreihen. Eine Andeutung der Spurformel.

Als Vorbereitung sollten kurz wiederholt werden: Die starke Approximation für $(\mathbb{A}, +)$ und für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, sowie Heckecharaktere.

Weitere Literatur findet sich in [Co1], Lectures 1–4 (eine weitere gute Übersicht), [Bu], [Ge] und [Ku]. Ein motivierter Zugang zum Übergang von Modulformen zu automorphen Formen findet sich in [De], Ch.1-2.

Gebhard Böckle

12.+19.04.07 **2. Die vollständige Reduzibilität von $L^2_0(\omega)$ und $\mathcal{A}_0(\omega)$ und die diskreten Reihen als Beispiel von Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$**

Es gibt zwei natürliche Algebren von Operatoren für die Stelle $\infty$. Zum einen gibt Faltung mit Funktionen in $C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ einen kompakten (und sogar Hilbert-Schmidt-) Operator auf $L^2_0(\Gamma, \omega)$, s. [Bu], Prop. 3.2.3. Hiermit zeigt man, dass $L^2_0(\Gamma, \omega)$ in eine direkte Summe $\oplus \mathcal{H}_i$ von irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf Hilberträumen $\mathcal{H}_i$ zerfällt, s. [Bu], Thm. 3.2.2. Das analoge Resultat im adelischen Kontext ist [Bu], Thm. 3.3.2. Die knappere aber lückenhafte Darstellung in [Bu2], §1,2, ist zu Beginn vielleicht besser lesbar.

Sei nun $U(\mathfrak{g})$ die universelle Einhüllende der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von $G(\mathbb{R})$, welche man als Raum invarianter Differentialoperatoren betrachten sollte, s. [Bu], §2.2, und sei $K_\infty \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Untergruppe der orthogonalen Matrizen. Mithilfe der Operation von $C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ zeigt man, dass die $K_\infty$-endlichen Vektoren in den obigen $\mathcal{H}_i$ dicht liegen und $C^\infty$-Funktionen sind, [Bu], Thm. 3.2.2 und Prop. 2.4.5. Insbesondere ist $\mathcal{A}_0(\omega)$ dicht in $L^2_0(\omega)$. Auf $\mathcal{A}_0(\omega)$ hat man keine Operation von $G(\mathbb{R})$, denn $K_\infty$-Endlichkeit bleibt unter Konjugation mit $G(\mathbb{R})$-nicht erhalten. Daher definiert man eine zweite Heckealgebra $\mathcal{H}_\infty$, welche nun auf $\mathcal{A}_0(\omega)$ operiert durch $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} C^\infty_{\mathrm{K-fin}}(K_\infty)$, s. [Bu], S. 310-312. Betrachtet man die Situation wieder adelisch, so bilden die $K_\infty$-endlichen Vektoren einer irreduziblen Unterdarstellung von $L^2_0(\omega)$ eine irreduzible zulässige Darstellung für $\mathcal{H}_\infty \otimes C_c^\infty(G(\mathbb{A}^f))$, s. [Bu], Thm. 3.3.4.

Im Rest des Vortrages soll noch ein Teil der Darstellungstheorie von $G(\mathbb{R})$ dargestellt werden – etwa im Umfang von [Ro2], S. 16–17. Um den Zusammenhang mit der klassischen Theorie von Modulformen aufzuzeigen, erläutere man Formel 2.3 aus [Ro2]. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in [Bu], § 2.5 oder [Ge], 4A.

Jochen Heinloth

Im folgenden sei $F$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$.

26.04.07 **3. Grundlagen der Darstellungstheorie von $G(F)$**

Der erste und umfangreichere Teil des Vortrages kann sich an [Ro1], S.1–5, orientieren. Alle Ergebnisse hieraus sollen dargestellt werden – Beweise soweit sinnvoll. Vieles findet sich auch in [Bu], §4.2 und 4.5. (Für Modulformen sind alle bis auf endliche viele Faktoren der zugehörigen Darstellung unverzweigte Hauptreihendarstellungen!) Es wäre gut, kurz die Darstellungstheorie einer kompakten topologischen Gruppe zu wiederholen – falls dies nicht bereits im vorigen Vortrag geschehen ist, [Bu], Theorem 2.4.1, Prop. 4.2.2. Zusätzlich sollen die Aussagen über unverzweigte Darstellungen in [Ro1], S.21–22, bis einschließlich Korollar 29 dargestellt werden. (S. auch [Bu], Theorem 4.6.1.) Zum

Abschluss sollte noch erklärt werden, warum die übliche Heckeoperation von $T_p$ auf Modulformen mit der neu definierten auf automorphen Formen übereinstimmt, s. [Ro2], Lemma 2.12. Weitere Referenzen sind [Ca] und [Ge], §4 und § 7.

Ralf Butenuth

10.05.07 **4. Der Tensorproduktsatz**

Es soll [Bu], Theorem 3.3.3 und §3.4 dargestellt werden. (s. auch [Co1], Lecture 3).

Marios Magioladitis

03.05.07 **5. Der Jacquetmodul und superkuspidale Darstellungen**

Es sollen einige Aspekte der Darstellungstheorie der Gruppen $G(F)$ vertieft werden. Dies dient als Vorbereitung für den folgenden Vortrag. Inhalt soll im Wesentlichen [Ro1], S.5 (unten) bis Seite 10 sein. Der Beweis von [Ro1], Prop. 9, lässt sich durch direkte Rechnung erbringen. Referenz habe ich leider keine. In [Ca], S.5 wird gezeigt, dass $V_{\chi^{-1}}$ isomorph zur kontragradienten Darstellung von $V_\chi$ ist. In [Ca], am Ende von §1, wird ein Beweis von [Ro1], Prop. 11, gegeben. Außerdem sollte man im Anschluss an [Ro1], Cor. 13, zeigen, dass eine irreduzible Darstellung entweder eine Unterdarstellung einer Hauptreihendarstellung oder superkuspidal ist. (Der Beweis ist leicht.) [Ro1], Thm. 14, soll nicht bewiesen werden.

Am Ende sollte man erklären, wann zwei Hauptreihendarstellungen $V_\chi$ isomorph sind und wie im irreduziblen Fall die (getwisteten) Steinbergdarstellungen 'aussehen' (s. [Bu], §4.5, [Ca]). Folglich gibt es drei Klassen von irreduziblen zulässigen (unendlich-dimensionalen) Darstellungen von $G(F)$: superkuspidale, (irreduzible) Hauptreihen- und (getwistete) Steinbergdarstellungen, s. [Bu], S. 482.

Franziska Heinloth

24.05.07 **6. Whittakermodelle und Multiplizität Eins**

Als Vorbereitung sollten additive Charaktere auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ und Adelen erläutert werden. Dies findet sich z.B. in [Lan], §XIV.1 und XIV.6. Das Thm. 11 in XIV.6 besagt $(\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A})^\vee \cong \mathbb{Q}$. Dann soll das globale Whittakermodel einer automorphen Darstellung erläutert werden. Dies lässt sich gut mit Hilfe der Fourierentwicklung klassischer Modulformen motivieren, indem man die Fourierkoeffizienten der Form mit der Whittakerfunktion der zugehörigen automorphen Form bezüglich eines additiven Charakters vergleicht; s. [Co1], Lecture 4, [Co2], §1.2, oder [Bu], § 3.5.

Als nächstes sollen lokale Whittakerfunktionale und Whittakermodelle definiert werden; s. [Ro1] S. 12 und [Bu], § 4.4. Aus der Eindeutigkeit der lokalen Whittakermodelle soll die des globalen hergeleitet werden, sowie *Multiplizität Eins* für automorphe Darstellungen. Hiernach soll die Eindeutigkeit der lokalen Whittakermodelle wie folgt gezeigt werden: Für die Hauptreihen wird in [Ro1], S.15(unten)-16 ein Beweis gegeben. Anschließend erläutere man, dass der Endomorphismenring der Darstelung $\mathrm{Ind}_N^G(\psi)$ kommutativ ist – ein Beweis hiervon wird in [Co2] im Beweis von Theorem 1.2 skizziert. Für superkuspidale Darstellungen ergibt sich die Eindeutigkeit des Whittakermodells nun leicht aus dem Splitting Principle, [Ro1], Prop. 11 (so, wie es in [Co2], Beweis von Theorem 1.2 angedeutet wird).

Björn Buth

31.05.07 **7. Kirillovmodell und starke Multiplizität Eins**

Der Zugang in [Ro1] scheint mir konzeptionell am besten. Begonnen werden soll mit den Darstellungen $\tau_\psi$ und $\hat{\tau}_\psi$ in [Ro1], S. 11 und mit Lemma 15. Als nächstes beweise man [Ro1], Prop. 17, und definiere das Kirillovmodell [Ro1], S. 15. Eine explizite Definition findet sich in [Co1], Def. 4.2. Eine leicht andere (aber äquivalente) wird in [Bu] im Anschluss and Prop. 4.4.7 gegeben. Anschließend erläutere man kurz die Korollare [Ro1], 20–22. Für Steinberg und irreduzible Hauptreihendarstellungen wäre es schön, das Kirillovmodell explizt anzugeben, [Ro1], Cor. 24 (vermutlich aus Zeitgründen ohne Beweis). Nun sollte die Eindeutigkeit des Kirillovmodells sowie die *starke Multiplizitäts Eins* automorpher Darstellungen bewiesen werden; s. [Bu], §3.5 und [Co2], § 1.3.

Georg Hein

14.06.07 **8. Lokale $L$-Funktionen, der lokale Führer und ein Resümee des Zusammenhangs zwischen Neuformen und kuspidalen automorphen Darstellungen**

In diesem Vortrag sollen verschiedene Themen behandelt werden. Zum Teil dienen sie als Vorbereitung für den folgenden Vortrag. Zunächst sollen (lokale) $L$-Funktionen und die lokale Funktionalgleichung erläutert werden, wie etwa in [Ro1], S.19–21. Im Falle unverzweigter Hauptreihen ist der Vektor, der in [Ro1], Prop. 27, erwähnt wird, der sphärische Vektor, s. auch [Bu] §4.6 und §4.7. Anschließend soll der Führer einer lokalen Darstellung definiert werden. Dies findet sich in [De], Th. 2.2.6, Déf. 2.2.7.

Als weitere Themen würden sich anbieten: (a) Die explizite Berechnung der Heckelagebra einer unverzweigten lokalen Darstellung (alle solche sind Hauptreihendarstellungen) wie etwa in [Ro1], S. 22–23, oder [Bu], §4.6 (und hier insbesondere Prop. 4.6.6 und Thm. 4.6.4), sowie der Heckeeigenwerte. (b) Die Theorie der Alt- und Neuformen in der Sprache der automorphen Formen wie in [De], §2.4. (c) Ein Resümee über den Zusammenhang zwischen Modulformen und den zugehörigen automorphen Darstellungen: [Bu], Thm. 3.6.1, [De], §2.

Gabor Wiese

21.06.07 **9. Die lokale Langlandskorrespondenz**

Ziel dieses Vortrags ist es, die lokale Langlands-Korrespondenz und den Zusammenhang mit lokalen Eigenschaften von Galoisdarstellungen (zumindest über $\mathbb{Q}$) zu erklären. Dazu werden zunächst Weil-Deligne-Darstellungen eingeführt.

Sei dann $\pi_f = \otimes_v \pi_v$ die Tensorproduktzerlegung der automorphen Darstellung zu einer Hecke-Spitzenform $f$. Dann gelten:
(i) Hat $f$ an der Primstelle $p$ die Stufe 1, so ist $\pi_p$ eine unverzweigte Hauptreihe und der lokale $L$-faktor von $\pi_p$ stimmt mit dem lokalen $L$-Faktor von $f$ überein.
(ii) Man hat Korrespondenzen:

$$\pi_p \longleftrightarrow \text{Weil-Deligne-Darst. zu } \pi_p \longleftrightarrow \ell\text{-ad. Gal.-Darst. zu } f \text{ an } I_p$$

Ein mögliche Referenz ist [De], Ch.3.

Kay Rülling

## Die Spurformel

Als Übersicht über die Spurformel empfehle ich [Ro2], Ch.4. Etwas detailliertere angaben finden sich in im Artikel [Bu2], der zum Teil auf Ergebnisse aus [Bu] zurückgreift.

Wer's aber genau wissen will, muss wohl in [Ge], §8-§10, [JL], [He], [Mi] und der in [Ro2] angegebenen Sekundärliteratur lesen. Zusätzlich zu der in den jeweiligen Vorträgen angegebenen Literatur ist [Bu2] sehr empfehlenswert.

28.06.07 **10. Die Spurformel im kompakten Fall**

In diesem Vortrag werden wir uns mit der Spurformel im kompakten Fall befassen. Am Anfang soll schnell, als Motivation wie in [Ge, §9.1], die Spurformel im Falle $\mathbb{G}_a$ erläutert werden (=Poisson*sche* Summationsformel). Dann wird die sog. *Arthur-Selberg* Spurformel hergeleitet für halbeinfache Gruppen über Zahlkörpern (sprich $G_{/F}$), mit $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ kompakt (hierzu [Ge, §9.2] und [Ar, §I.1]). Die erste bzw. zweite Form der Spurformel müssen gekennzeichnet werden (Formel (9.11) bzw. (9.16) in [Ge]). Man erläutere, warum der kompakte Fall einfacher ist als der nicht kompakte mit endlichem Volumen. Hierzu vergleiche man die Spektralzerlegung von $L^2(\Gamma\backslash G)$ in den beiden Fällen. Dies greift auf einige der Hilfsmittel und Ergebnisse aus dem zweiten Vortrag zurück. Im nichtkompakten Fall soll die Spektralzerlegung lediglich formal angegeben werden. Ziel der kommenden beiden Vorträge wird es sein, sie genauer zu verstehen.

Pedro Luis del Angel

29.06.07 **11. Die Spektralzerlegung von $L^2(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}))$**

Wir werden hier die Spektralzerlegung von $L^2(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}))$ für den nicht kompakten Fall studieren. Zwei ausgezeichnete Bücher zu diesem Thema sind [Bo] und [Kub]. Das Erste mit starker Tendenz zur Arithmetik (soweit es bei diesem Problem geht), das Zweite eher zu Analysis. Das Buch von Kubota ist aber ein bisschen elementarer geschrieben als das von Borel, nicht nur deswegen, weil es die Zerlegung mit nur einer einzigen Spitze behandelt – was eigentlich keine wesentliche Einschränkung darstellt. Für uns ist [Bo] eher passend, da es mit in der automorphen Sprache geschrieben ist; was den weiteren Vorträgen zu Hilfe kommen wird. Die genauere Referenz hier ist [Bo, §13]. Resultate aus §12.6-§12.13, insb. die Maass-Selberg*schen* Relationen, könnten, je nach Zeit, bewiesen werden. Dagegen kann man die eher elementaren Eigenschaften der Eisenstein*schen* Reihen (§11 op.cit.) ohne weiteres zitieren.

Juan Cerviño

05.07.07 **12. Die Spektralzerlegung von $L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}})$**

Dies ist [Ge, §8]. Ziel des Vortrages ist es die Spektralzerlegung in der adelischen Sprache zu beschreiben. Es basiert auf den in dem vorherigen Vortrag gewonnenen Resultaten, die zum Teil – da wir auch z.B. analytische Fortsetzung / Funktionalgleichung der Eisenstein*schen* Reihen voraussetzen – die Punkte (1) bis (9) in [Ge, §8] (dort ohne Beweis) erklären. Die Resultate von §8.D und §8.E müssen, wie es auch im Buch steht, bewiesen werden.

Phung Ho Hai

06.07.07 **13. Die Spurformel: 1. Form**

Mit allen obigen Vorbereitungen kan man jetzt in diesem Vortrag Theorem 9.7 aus [Ge] beweisen. Die zu diesem Zeitpunkt noch nicht aufgetretenen Begriffe und zum Teil auch einfachen Resultate aus der Funktionalanalysis können ohne

Beweis zitiert werden. Sofern noch Zeit bleibt, führe man die vier in der Spurformel auftretenden Terme ein ([Ge, page 197]).

Stefan Kukulies

06.07.07 **14. Die Spurformel: 2. Form und Beispiel(e?)**

Ziel des Vortrages ist der Satz 9.22 (bzw. §9.C) loc.cit. Der gesamte Beweis passt nicht in einem Vortrag (es wäere auch in vielen nicht aufschlussreicher). Es müssen die vier Terme- und dann die fünf Terme-Summen erklärt werden. Von der fünf Terme-Summe ist nur kurz über die nicht parabolischen Terme zu sprechen (da die schon behandelt sein werden). Von den übrigen drei kann man vielleicht eine vollständige Darstellung des ersten parabolischen Terms angeben und die beiden anderen lediglich zitieren. Nun füge man die Spurformel zusammen (Theorem 9.22). Am Ende, je nach Zeit und Lust, erläutere man die Spurformel an einfachen Beispielen bzw. Spezialfällen, in denen die Formel eine besonders einfache Gestalt annimmt (z.B. Ende des §9, die erste Spurformel überhaupt (Eichlers) [Mi, §6.8]). Es sind auch sehr nette Anwendungen zu nennen wie am Ende des Buches von Gelbart - zum Beispiel *Eichlers Basisproblem...*

Pedro Luis del Angel u. Juan Cerviño

# Literatur


[Ar] J. Arthur, *An introduction to the trace formula*, http://www.claymath.org/cw/arthur/pdf/62.pdf.

[BG] D. Bump, J. W. Cogdell, E. de Shalit, D. Gaitsgory, E. Kowalski, S. S. Kudla, *An introduction to the Langlands program*, Lectures presented at the Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, March 12–16, 2001. Edited by Joseph Bernstein and Stephen Gelbart. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[Bo] A. Borel, *Automorphic forms an $SL_2(\mathbb{R})$*, Cambridge Tracts in Mathematics 130.

[Bu] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55.

[Bu2] D. Bump, Aufsatz 8 in [BG].

[Ca] Casselmann: Aufsatz 1 in [MF].

[Co1] J.W. Cogdell: Aufsatz 1 in [CKM].

[Co2] J.W. Cogdell: *L-functions and converse theorems for* $\mathrm{GL}_n$ in 'Automorphic Forms and Applications', IAS/Park City Mathematics Series, AMS 2007.

[CKM] James W. Cogdell, Henry H. Kim, M. Ram Murty, *Lectures on automorphic L-functions*, Fields Institute Monographs, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[De] Deligne: Aufsatz 2 in [MF].

[Ge] Stephen S. Gelbart, *Automorphic forms on adèle groups*, Annals of Mathematics Studies, No. 83. Princeton University Press, Princeton, 1975.

[Go] Roger Godement *Notes on Jacquet-Langlands Theory*, IAS, Princeton (1970).

[He] D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula for* PSL(2, $R$), Vol. 1, LNM **548**, Vol. 2, LNM **1001**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[JL] H. Jacquet, R. P. Langlands, *Automorphic forms on* GL(2), LNM **114**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Kub] T. Kubota, *Elementary Theory of Eisenstein Series*, Wiley (1973).

[Ku] Kudla, Aufsatz 7 in [BG].

[Lan] S. Lang, *Algebraic number theory*, GTM **110**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Mi] T. Miyake, *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[MF] ed. W. Kuyk and J.-P. Serre, *Modular functions of one variable III*, Proceedings of the International Summer School, University of Antwerp, RUCA, July 17–August 3, 1972, LNM **350**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[Ro1] J. R. Rogawski, *Admissible Representations of $GL_2(F)$: The $p$-adic case*, Preprint, http://www.math.ucla.edu/~jonr/eprints.html.

[Ro2] J. R. Rogawski, *Modular forms, the Ramanujan conjecture and the Jacquet-Langlands correspondence*, http://www.math.ucla.edu/~jonr/eprints.html.