DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

# GRUPPENKOHOMOLOGIE
## ÜBUNGSBLATT I

$\leq$ 24.4.2013

Der zugrundeliegende Ring wird mit $A$ bezeichnet.

(1) *Zur Proposition 4.*
Seien $M_\cdot := (M_\cdot, d_\cdot^M)$ und $N_\cdot := (N_\cdot, d_\cdot^N)$ zwei Komplexe (also, keine Einschränkung bei den Moduln von negativem Grad). Dann gibt die Konstruktion von $\mathscr{H}om_A(M_\cdot, N_\cdot)_\cdot$ wieder ein Komplex[1], desen Homologie für jedes $n \in \mathbb{Z}$ durch $[\Sigma^n M_\cdot, N_\cdot]$ beschrieben wird.
In der Vorlesung haben wir $H_n(\mathscr{H}om_A(M_\cdot, N_\cdot)_\cdot)$ beschrieben. Machen Sie das Entsprechende für $[\Sigma^n M_\cdot, N_\cdot]$, woraus die Gleichheit ersichtlich wird.

$\leq$2 Punkte

(2) *Zum Abbildungskegel.*
Sei $f_\cdot : M_\cdot \to N_\cdot$ ein Komplexenhomomorphismus vom Grad Null. Dann sind, für einen beliebigen Komplex $N_\cdot$, die Komplexe $\mathscr{H}om_A(N_\cdot, \mathrm{Cone}(f_\cdot)_\cdot)_\cdot$ und $\mathrm{Cone}(\mathscr{H}om_A(N_\cdot, f_\cdot))_\cdot$ isomorph.

$\leq$4 Punkte

(3) *Zur Homotopieäquivalenz.*
Sei $f_\cdot : L_\cdot \to M_\cdot$ eine Kettenabbildung. Dann ist $f_\cdot$ eine Homotopieäquivalenz, genau wenn für jeden Kettenkomplex $N_\cdot$, der Gruppenhomomorphismus $\mathscr{H}om_A(N_\cdot, f_\cdot)_\star : [N_\cdot, L_\cdot] \to [N_\cdot, M_\cdot]$ ein Isomorphismus ist.

$\leq$0 Punkte

(4) *Tensorprodukt von Komplexen.*
Für zwei Komplexe $M_\cdot$ und $N_\cdot$ definieren wir den *Tensorproduktkomplex* $M_\cdot \otimes N_\cdot$ durch $(M_\cdot \otimes N_\cdot)_n := \oplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$ mit Differential bestimmt durch $D^{\otimes}(x \otimes y) := d^M x \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d^N y$, für $x \in M_\cdot$ und $y \in N_\cdot$ ($\deg x = n$, s.d. $x \in M_n$)[2].
  (a) Zeigen Sie, dass folgende Auswertungsabbildung ein Komplexenhomomorphismus vom Grad Null ist: $\mathscr{H}om_A(M_\cdot, N_\cdot)_\cdot \otimes M_\cdot \longrightarrow N_\cdot$, $u \otimes x \mapsto \langle u, x \rangle := u(x)$, nämlich, dass $d^N \langle u, x \rangle = \langle Du, x \rangle + (-1)^{\deg u} \langle u, d^M x \rangle$.
  (b) Benutzen Sie letzte Formel um folgendes zu beweisen. Seien $v \in \mathscr{H}om_A(M_\cdot, N_\cdot)_q$ und $u \in \mathscr{H}om_A(N_\cdot, L_\cdot)_p$, die Verkettung $u \circ v$ liegt in $\mathscr{H}om_A(M_\cdot, L_\cdot)_{p+q}$. Dann ist die Verkettungsabbildung $\mathscr{H}om_A(N_\cdot, L_\cdot)_\cdot \otimes \mathscr{H}om_A(M_\cdot, N_\cdot)_\cdot \to \mathscr{H}om_A(M_\cdot, L_\cdot)_\cdot$ ein Komplexenhomomorphismus vom Grad Null: $D(u \circ v) = Du \circ v + (-1)^p u \circ Dv$ – wobei $D$ bei seinem jeweiligen Komplex zu verstehen ist.

$\leq$5 Punkte

[1] Nach unserer Definition von Kettenkomplex in der Vorlesung, wo $M_n = 0$ fur $n < 0$, haben wir dann immer Komplexe *bei Null abgeschnitten*, wenn wir diese Kettenkomplexe genannt haben.

[2] Wie im Brown angemerkt, ist dieser Komplex einer von $A$-Moduln wieder, wenn $A$ kommutativ ist, ansonsten betrachten wir ihn als Komplex über $\mathbb{Z}$ (d.h. Komplex von abelschen Gruppen)