DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT X

$\leq$ 27.6.2013

(37) *Überbleibsel aus der Vorlesung.*

Sei $\alpha : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt $\alpha^\star([u] \smile [v]) = \alpha^\star[u] \smile \alpha^\star[v]$ in $H^\star(G, M \otimes_{\mathbb{Z}} N)$, für alle $[u] \in H^\star(G', M)$ und $[v] \in H^\star(G', N)$.

$\leq$3 Punkte

(38) *Explizite Cup-Produkten.*

Seien $x \in H^0(G, M) = M^G$ und $[v] \in H^q(G, N)$, zeigen Sie, dass $x \smile [v] = (f_x)_\star(v)$, wobei $(f_x)_\star : H^\star(G, N) \to H^\star(G, M \otimes_{\mathbb{Z}} N)$, der durch den $\mathbb{Z}G$-Modulhomomorphismus $f_x : N \to M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, $y \mapsto x \otimes y$, in der Kohomologie induzierte Gruppenhomomorphismus ist. [1]

$\leq$4 Punkte

(39) *Übung (36) (contd').*

Berechnen Sie anhand von der Diagonalapproximation aus der o.g. Übung die Cup-Produkten in $H^\star(G, M)$, für G eine endliche, zyklische Gruppe.

$\leq$5 Punkte

(40) *Ring- und Modulstrukturen anhand von Cup-Produkten (I).*

Sei X ein freier G-Komplex (X CW-Komplex, mit einer Zellen-permutierenden, freien Wirkung von G), der homoömorph zu S^{2k-1} ist – G muss dann endlich sein. Wir haben aus dem Lefschetz-Fixpunktsatz gesehen, dass G trivial auf $H_{2k-1}(X) = \mathbb{Z}$ operiert, woraus man eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}G$-Moduln hat:

$$0 \to \mathbb{Z} \to C^{\text{cell}}_{2k-1}(X) \to \ldots \to C^{\text{cell}}_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

wo alle $C^{\text{cell}}_l(X)$ freie G-Moduln sind[2].

(a) Zeigen Sie, dass es für jeden $\mathbb{Z}G$-Modul M eine *"iterierte Korandabbildung"* $d : H^i(G, M) \to H^{i+2k}(G, M)$ gibt, die ein Isomorphismus ist für $i > 0$ und ein Epimorphismus falls $i = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $[u] \in H^{2k}(G, \mathbb{Z})$ gibt, so dass für die Abbildung d aus (40a) $d([v]) = [u] \smile [v]$ für alle $[v] \in H^\star(G, M)$[3].

$\leq$7 Punkte

---

[1] Hinweis: Benutzen Sie, u.A., die Koeffizientenverträglichkeit des Cup-Produktes.

[2] Dies, zusammen mit der exakten Sequenz von $\mathbb{Z}G$-Moduln ist alles, was man bruacht! Für (a), tensorieren Sie diese exakte Sequenz mit M, teilen Sie diese in lauter kurzen exakten Sequenzen worauf Sie das Argument der Dimensionsverschiebung anwenden.

[3] Benutzen Sie die *Kompatibilität von δ* vom Cup-Produkt und die Eigenschaften der Eins-Kozykel.