DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT XI

$\leq$ 4.7.2013

(41) *Überbleibsel aus der Vorlesung.*
Seien $\alpha : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, M und N zwei G'-Moduln. Dann gilt $\alpha_\star(\alpha^\star[u] \frown [z]) = [u] \frown \alpha_\star[z]$ in $H_\star(G', M \otimes_{\mathbb{Z}} N)$, für alle $[u] \in H^\star(G', M)$ und $[z] \in H^\star(G, N)$.[1]

$\leq$5 Punkte

(42) *Ring- und Modulstrukturen anhand von Cup-Produkten (II).*
Benutzen Sie Teil (I), Aufgabe (40), um die Ringstruktur von $H^\star(G, \mathbb{Z})$ zu bestimmen, für G eine endliche, zyklische Gruppe.

$\leq$4 Punkte

(43) *Mehr über die Kohomologie zyklicher Gruppen.*
Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Für jedes $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gibt es einen Endomorphismus $\alpha(m)$ von G gegeben durch $g \mapsto \alpha(m)(g) := g^m$. Berechnen Sie $\alpha(m)^\star : H^\star(G, \mathbb{Z}) \to H^\star(G, \mathbb{Z})$.[2]

$\leq$7 Punkte

(44) *Pontryagin-Produkte*
Sei G eine abelsche Gruppe, dann $\mathbb{Z}G$ ist ein kommutativer Ring. Sind M und N zwei $\mathbb{Z}G$-Moduln, dann definieren wir $M \otimes_G N$ als die zugrundeliegende abelsche Gruppe $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N = (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_G$ mit folgender induzierter (sog. *anti-diagonaler*) Operation von G auf $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$: $g(x \otimes y) := g^{-1}x \otimes gy$. *Warnung: Die Notation hier (und in der Vorlesung) bzgl. dieser Tensorprodukten sind mit denen von Braun vertauscht!!*

(a) Ist G abelsch, zeigen Sie dass es ein *Pontryagin-Produkt*[3] gibt
$$H_\star(G, M) \otimes_{\mathbb{Z}} H_\star(G, N) \to H_\star(G, M \otimes_G N).$$
(b) Geben Sie ein Beispiel wo die zwei $\mathbb{Z}G$-Moduln $M \otimes_G N$ und $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ nicht isomorph sind.[4]

$\leq$6 Punkte

[1] Die Moduln M und N sind bei der (Ko-) Homologie bzgl. G als die entsprechenden Restriktionen vemöge α zu verstehen.

[2] Hinweis: Benutzen Sie das schon Bekannte über die Struktur der Kohomologie als Ring, und führen Sie dann das Problem auf den Fall $H^2(G, \mathbb{Z})$ zurück, wo Sie dann die Beschreibung durch Gruppenerweiterungen benutzen können.

[3] Ein ähnlich wie das eigentliche Pontryagin-Produkt zu Definierendes, wo man nicht als Wertemodul einen Ring A hat, sondern unterschiedliche Moduln – der Punkt ist dann zu zeigen, dass der daraus resultierende Wertemodul die Modulstruktur von dem gerade eingeführten Tensorprodukt hat.

[4] Hinweis: Nehmen Sie G zyklisch der Ordnung 3 und $M = N = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit nicht trivialer Operation von G.

Zu Aufgabe (41) u. Allgemein.

Nur zur Erinnerung, und als wiederholte Warnung, dass Sie die Vorzeichen auf jeden Fall berücksichtigen müssen (beim Beweis einer Eigenschaft habe ich, wie schon gesagt, dies, obwohl trivial, ausser betracht gelassen). Unser Cap-Produkt ist in der Ko- bzw. Homologie durch folgende Abbildung induziert (hier benutzen wir eine einzige projektive Auflösung $P_\bullet$ von $\mathbb{Z}$ als trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul, und $\tau_\bullet$ eine Diagonalapproximation):

$$\mathscr{H}\!om_{\mathbb{Z}G}(P_\bullet, M) \otimes_{\mathbb{Z}} (P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} N) \to P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} (M \otimes_{\mathbb{Z}} N),$$

die durch Verkettung zweier Abbildungen gegeben ist, nämlich $\mathrm{ev}' \circ (\mathrm{Id}_{\mathscr{H}\!om} \otimes \tau_\bullet \otimes \mathrm{Id}_N)$, wobei $\mathrm{ev}'(u \otimes \gamma \otimes \gamma' \otimes y) := (-1)^{\deg u \deg \gamma} \gamma \otimes u(\gamma') \otimes y$.
Also, für einen einfachen Tensor $u \otimes z$, wobei $z = \gamma \otimes y$ und $\tau_\bullet(\gamma) = \sum_{i \in I} \gamma_i \otimes \gamma_i'$, ist $u \frown z = \sum_{i \in I} (-1)^{\deg u \deg \gamma_i} \gamma_i \otimes u(\gamma_i') \otimes y$.

Für die Aufgabe selbst empfehle ich Ihnen die Diagonalapproximation $\tau_\bullet$ oben einfach mal mit $\Delta_\bullet$ zu bezeichnen (mit der Anmerkung, dass diese nicht unbedingt die Alexander-Whitney Diagonalapproximation ist), damit Sie dann $\tau_\bullet$ für die Berechnung von $\alpha_\star$ und $\alpha^\star$, wobei $\tau_\bullet$ einen Kettenhomomorphismus war.
Weiterer Hinweis: Benutzen Sie die Standard-Auflösungen für G und G'.