DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT XII

$\leq$ 11.7.2013

(45) *Überbleibsel aus der Vorlesung.*

Zeigen Sie, dass die im Beweis der Künneth Formel (Theorem 10) konstruierte injektive Abbildung tatsächlich das Kreuzprodukt ist.

$\leq$4 Punkte

(46) *Homologie und direkter Limes.*

Zeigen Sie, dass die Homologie mit direktem Limes kommutiert. Genauer, sei $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ ein direktes System von Gruppen (I eine gerichtete Menge), und sei $G = \varinjlim G_\alpha$. Für jeden G-Modul M haben wir eine kompatible Familie von Abbildungen $H_\star(G_\alpha, M) \to H_\star(G, M)$, $\alpha \in I$, und von daher eine Abbildung $\varphi : \varinjlim H_\star(G_\alpha, M) \to H_\star(G, M)$. Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus ist.[1]

Benutzen Sie die o.g. Eigenschaft, um zu zeigen, dass für jeden kommutativen Ring A, die Homologie $H_\star(G, A)$, mit dem Pontryagin-Produkt versehen, ein strikt alternierender Ring ist.[2]

$\leq$6 Punkte

(47) *Zulässige Produkte.*

Sei G eine endliche, zyklische Gruppe. Geben Sie eine Auflösung von $\mathbb{Z}$ als trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul zusammen mit einem zulässigen Produkt an.[3]

$\leq$4 Punkte

(48) *Künneth Formel.*

(a) Zeigen Sie, dass $\oplus_{p+q=n} H_p(R_\bullet) \otimes_A H_q(L_\bullet) \cong H_n(R_\bullet \otimes_A L_\bullet)$ für $R_\bullet$ und $L_\bullet$ Komplexe von rechten bzw. linken A-Moduln, falls $Z_m(R_\bullet)$, $B_m(R_\bullet)$ und $H_m(L_\bullet)$ flache A-Moduln sind.
(b) Leiten Sie aus der (homologischen) Künneth Formel (Theorem 10) die homologische kurze exakte Sequenz aus der Übung (15.b).

$\leq$4 Punkte

[1] Hinweis: Benutzen Sie die Standard-Auflösung.

[2] Hinweis: Reduzieren Sie diese Behauptung auf den Fall, wo G endlich erzeugt ist.

[3] Hierfür können Sie einfach, das in der Vorlesung angegebene Beispiel benutzen, wo Sie dann aber noch zeigen müssen, dass das definierte Produkt zulässig ist.