

GRUPPENKOHOMOLOGIE
ÜBUNGSBLATT XIII

≤ 18.7.2013

(49) *Betti Zahlen*¹.

Seien R_\bullet und L_\bullet Komplexe endlich erzeugter, freier, abelscher Gruppen. Berechnen Sie den \mathbb{Z} -Rang von $H_\star(R_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} L_\bullet)$ (bzw. seine Torsionsuntergruppe) anhand von $H_\star(R_\bullet)$ und $H_\star(L_\bullet)$.

≤4 Punkte

(50) *Mehr zur Künneth Formel und universellem Koeffiziententheorem*².

Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement.

- (a) Formulieren Sie eine entsprechende Künneth Formel für das Produkt dreier Komplexe von A -Moduln $R_\bullet \otimes_A M_\bullet \otimes_A L_\bullet$.
(b) Benutzen Sie (i) mit $A = \mathbb{Z}$, um zu zeigen, dass für abelsche Gruppen G_i , $i = 1, 2, 3$ folgendes gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^A(G_1, \mathrm{Tor}_1^A(G_2, G_3)) &\cong \mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Tor}_1^A(G_1, G_2), G_3), \\ \mathrm{Ext}_A^1(G_1, \mathrm{Ext}_A^1(G_2, G_3)) &\cong \mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Tor}_1^A(G_1, G_2), G_3).\end{aligned}$$

≤7 Punkte

(51) *Induzierte Abbildung in der Homologie*.

Seien G eine abelsche Gruppe, $m \in \mathbb{Z}$ und $\alpha_m : G \rightarrow G$ der Gruppenhomomorphismus $g \mapsto g^m$. Berechnen Sie die induzierte Abbildung in der Homologie $(\alpha_m)_\star : H_\star(G, \mathbb{Q}) \rightarrow H_\star(G, \mathbb{Q})$.

≤5 Punkte

(52) *Äußere Algebren und Pontryagin Produkte*.

Seien G eine abelsche Gruppe, und A ein Hauptidealring mit einer trivialen Wirkung von G .

- (a) Zeigen Sie dass die Einbettung $\psi : \wedge^2(G \otimes_{\mathbb{Z}} A) \rightarrow H_2(G, A)$ aus Theorem 14 (bzw. (6.4) in Brown) bildet $(g \otimes 1) \wedge (p' \otimes 1)$ auf $[g \mid g'] - [g' \mid g]$ ab.
(b) Ist 2 in A invertierbar, zeigen Sie dann, dass die Abbildung $C_2^{\mathrm{bar}}(G, A) \rightarrow \wedge^2(G \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ gegeben durch $[g \mid g'] \mapsto (g \otimes 1) \wedge (g' \otimes 1)/2$ eine Abbildung $H_2(G, A) \rightarrow \wedge^2(G \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ induziert, die invers zu ψ ist.

≤8 Punkte

¹Die angegebenen \mathbb{Z} -Ränge heißen *Betti-Zahlen*.

²Die exakten Sequenzen aus der Übungsaufgabe (15).