DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT XV

(57) *Eine vollständige Diagonalapproximation.*

Sei $\widehat{P}_\bullet := \widehat{P}_\bullet^{\text{std}}$ die vollständige Standard-Auflösung von $\mathbb{Z}$ als trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul[1] (d.h. $\widehat{P}_\bullet = C_\bullet^{\text{std}} \coprod \Sigma \left(C_\bullet^{\text{std}}\right)^\vee$).

(a) Ist $l < 0$, dann ist $P_l := \widehat{P}_l := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_{-l-1}^{\text{std}}(G), \mathbb{Z}G)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul erzeugt durch die duale Basis $\varphi_{(g_0,\ldots,g_{-l-1})} : (h_0, \ldots, h_{-l-1}) \mapsto 1$ falls $(g_0, \ldots, g_{-l-1}) = (h_0, \ldots, h_{-l-1})$, und $\mapsto 0$ andernfalls. Zeigen Sie, dass d_l folgende Abbildung ist:

$$d_l(\varphi_{(g_0,\ldots,g_{-l-1})}) = \sum_{g\in G} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \varphi_{(g_0,\ldots,g_{i-1},g,g_i,\ldots,g_{l-1})}.$$

(b) Wir definieren $\widehat{\Delta} : \widehat{P}_\bullet \to \widehat{P}_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P}_\bullet$ durch $\widehat{\Delta}^{(p,q)} : P_{p+q} \to P_p \otimes P_q$ wie folgt:

für $p \geq 0$ and $q \geq 0$:

$$\widehat{\Delta}^{(p,q)}(g_0, \ldots, g_{p+q}) = (g_0, \ldots, g_p) \otimes (g_p, \ldots, g_{p+q});$$

für $p \geq 1$ und $q \geq 1$:

$$\widehat{\Delta}^{(p,q)}(\varphi_{(g_0,\ldots,g_{p+q-1})}) = \varphi_{(g_0,\ldots,g_{p-1})} \otimes \varphi_{(g_p,\ldots,g_{p+q-1})};$$

für $p \geq 0$ and $q \geq 1$:

$$\widehat{\Delta}^{(p,-p-q)}(\varphi_{(g_0,\ldots,g_{q-1})}) = \sum (g_0, s_0, \ldots, s_{p-1}) \otimes \varphi_{(s_{p-1},\ldots,s_0,g_0,\ldots,g_{q-1})};$$

$$\widehat{\Delta}^{(-p-q,p)}(\varphi_{(g_0,\ldots,g_{q-1})}) = \sum \varphi_{(g_0,\ldots,g_{q-1},s_0,\ldots,s_{p-1})} \otimes (s_{p-1}, \ldots, s_0, g_{q-1});$$

$$\widehat{\Delta}^{(p+q,-q)}(g_0, \ldots, g_p) = \sum (g_0, \ldots, g_p, s_0, \ldots, s_{q-1}) \otimes \varphi_{(s_{q-1},\ldots,s_0)};$$

$$\widehat{\Delta}^{(-q,p+q)}(g_0, \ldots, g_p) = \sum \varphi_{(s_0,\ldots,s_{q-1})} \otimes (s_{q-1}, \ldots, s_0, g_0, \ldots, g_p);$$

wobei alle Summen erstrecken sich über die s_i's in G.

Zeigen Sie dass $\widehat{\Delta}$ eine vollständige Diagonalapproximation für die vollständige Standard-Auflösung (bzw. die vollständige Version der Alexander-Whitney Diagonalapproximation) ist.

$\leq$7 Punkte

(58) *Überbleibsel aus der Vorlesung I.*

Zeigen Sie, dass der Isomorphismus $\varphi := \varphi_p : \widehat{H}^p(G, M) \to \widehat{H}_{-p-1}(G, M)$ aus Proposition 8 (Proposition VI.7.2 in Brown) bis aus Vorzeichen durch das Cap-Produkt mit einem Element $z \in H_{-1}(G, \mathbb{Z})$ gegeben ist, und zwar wie folgt:

(a) Zeigen Sie, dass φ natürlich ist und kompatibel mit dem Verbindungshomomorphismus langer exakten Sequenzen.

[1]Zur Notation: $\left(\widehat{P}_\bullet\right)_l$:=: $\widehat{P}_l$:=: P_l für alle $l \in \mathbb{Z}$ – d.h. $\widehat{\ }$ dient nur als Erinnerung daran, dass die Auflösung vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi : \widehat{H}^0(G,M) \to \widehat{H}_{-1}(G,M)$ durch Cup-Produkt mit z gegeben ist ($z = \varphi(1)$, wenn $M = \mathbb{Z}$).[2]

(c) Benutzen Sie die Resultaten aus der Aufgabe zur Dimensionsverschiebung, um zu zeigen, dass bis auf Vorzeichen φ und $\frown z$ stimmen in jedem Grad der Kohomologie überein.

≤7 Punkte

(59) *Eine weitere Dualität.*

Sei M ein $\mathbb{Z}G$-Modul, frei als $\mathbb{Z}$-Modul. Zeigen Sie dann, dass

$$\widehat{H}^p(G, M^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{H}^{-p}(G,M) \xrightarrow{\smile} \widehat{H}^0(G, M^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} M) \to \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z})$$

eine Dualität ist.

≤5 Punkte

---

[2]Hinweis: Per Definition von z, φ und $\frown z$ stimmen bei $1 \in \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z})$ überein. Für beliebige M und $u \in \widehat{H}^0(G,M)$, nemen Sie einen Homomorphismus $\mathbb{Z} \to M$, so dass $1 \mapsto u$ vermöge der induzierten Abbildung $\widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^0(G,M)$. Dann gilt $\varphi(u) = u \frown z$ wegen Natürlichkeit.