DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT II

$\leq$ 2.5.2013 (9:30 UHR)

(5) *Fundamentalgruppen: elementare Eigenschaft.*

Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum.

(a) Seien $x, y \in X$, und $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ zwei Wege mit Ursprung x und Ende y. Unter welchen Bedingungen[1] sind die entsprechenden Gruppenisomorphismen $\mathrm{ad}_{\gamma_0}, \mathrm{ad}_{\gamma_1} : \pi(X, x) \to \pi(X, y)$ gleich?

(b) Finden Sie auch die Bedingungen, damit folgendes gilt: für beliebige zwei Punkte $x, y \in X$, induziert jeder Weg γ von x nach y denselben Isomorphismus von $\pi(X, x)$ nach $\pi(X, y)$.

$\leq$3 Punkte

(6) *Fundamentalgruppe: weitere Beispiele.*

Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung vom topologischen Raum X mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt einen Punkt x_0 im Durchschnitt $\cap_i U_i$.
- Jedes U_i ist einfach zusammenhängend.
- Für alle i, j ist der Durchschnitt $U_i \cap U_j$ weg-zusammenhängend.

Dann ist X einfach zusammenhängend[2].

Folgern Sie hieraus, dass S^n einfach zusammenhängend ist für $n \geq 2$.

$\leq$4 Punkte

(7) *Überlagerungen.*

Bestimmen Sie explizit alle Überlagerungen (bis auf Isomorphismen) für $X := S^1$ und für $X := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} := \mathbb{RP}^2$.

$\leq$3 Punkte

(8) *CW-Komplexe: zwei Beispiele.*

(a) Sei S eine nicht leere Menge, G die freie Gruppe mit Erzeugern aus S. Definieren wir X als ein 'bouquet' von Kreisen S^1 über S: $X := \vee_{s \in S} (S^1)_s$. Versehen Sie X explizit mit einer Struktur eines (1-dimensionalen) CW-Komplexes.

(b) $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$: ähnlich, wie schon für $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ gesehen, ist der komplexe projektive n-Raum ein $2n$-dimensionaler CW-Komplex durch folgende Struktur. Wir identifizieren zuerst $\mathbb{C}^l$ mit $\mathbb{R}^{2l}$. Genauso wie im reellen Fall, durch ergänzen mit Null, haben wir $\mathbb{C}^l \subset \mathbb{C}^{l+1}$, was $\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \subset \ldots \subset \mathbb{P}^n$ liefert. Wir setzen $X^{2l+\epsilon} := \mathbb{P}^l_{\mathbb{C}}$ für $l = 0, \ldots, n$, $\epsilon = 0, 1$. Für jedes $l \geq 1$ gibt es eine $2l$-Zelle $\mathbb{P}^l_{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{P}^{l-1}_{\mathbb{C}}$ (die einzige 0-Zelle ist der Punkt $\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}}$). Die charakteristische Abbildung $f_l : \overline{D^{(2l)}} \to \mathbb{P}^l_{\mathbb{C}}$ für jedes l ist, unter Benutzung der o.g. Identifikation, durch $\underline{z} = (z_0, \ldots, z_{l-1}) \mapsto f_l(z_0, \ldots, z_{l-1}) := (z_0, \ldots, z_{l-1}, \sqrt{1 - |\underline{z}|^2})$. Zeigen Sie, dass dieses Datum eine CW-Struktur auf $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ definiert.

$\leq$5 Punkte

[1] Damit sind selbsverständlich, Notwendige und Hinreichende gemeint – im Foldenden auch.

[2] Stichwort: Lebesgue-Zahl...