DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT III

$\leq$ 8.5.2013 (19:00 UHR)

(9) *Koinvarianten.*

Seien G eine Gruppe, H eine normale Untergruppe von G, und M ein G-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass die Operation von G auf M eine Operation von der Quotientengruppe G/H auf M_H induziert.

(b) Es gilt $M_G \cong (M_H)_{G/H}$.

(c) Zeigen Sie, dass $M_H \cong \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ als G/H-Moduln[1].

$\leq$3 Punkte

(10) *Standard-, Bar-, periodische Auflösung I.*

Seien $g_1, g_2, \ldots, g_l$ paarweise untereinander kommutierende Elementen aus einer Gruppe G, $z := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} [g_{\sigma(1)} \mid \ldots \mid g_{\sigma(n)}] \in C_n(K(G))$. Zeigen Sie, dass z ein Zykel ist.

$\leq$2 Punkte

(11) *Standard-, Bar-, periodische Auflösung II.*

Sei G eine nicht triviale zyklische Gruppe. Dann hat $M = \mathbb{Z}$ als trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul unendliche projektive Dimension (d.h. M besitzt keine projektive Auflösung von endlicher Länge). Schließen Sie daraus, dass für eine beliebige, nicht freie Gruppe G (d.h. G besitzt mindestens ein nicht triviales Torsionselement), der triviale $\mathbb{Z}G$-Modul $M := \mathbb{Z}$ auch unendliche projektive Dimension hat.

$\leq$3 Punkte

(12) *Eine topologische Interpretation.*

Sei Y ein weg-zusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $H_\star(Y) \cong H_\star(G)$, falls es eine zusammenziehbare, reguläre Überlagerung X von Y gibt, mit Decktransformationsgruppe G[2].

$\leq$4 Punkte

[1] Da der zugrundeliegende Ring nicht unbedingt kommutativ ist, achtet man auf folgende Modulstrukturen: eine Rechtsmodulstruktur von $\mathbb{Z}[G/H]$ als G-Modul (H normal), um das Tensorprodukt zu bilden, und eine Linksmodulstruktur von $\mathbb{Z}[G/H]$ als G/H-Modul, um das Tensorprodukt als ein (linker) G/H-Modul zu betrachten.

[2] Hinweis: Der singulärer Kettenkomplex $C_\star^{\text{sing}}(X)$ gibt eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}G$-Modul und $C_\star^{\text{sing}}(X)_G \cong C_\star^{\text{sing}}(Y)$.