DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT IV

$\leq$ 16.5.2013

(13) *Projektive und flache $\mathbb{Z}G$-Moduln.*
(a) Seien P ein flacher $\mathbb{Z}G$-Modul und M ein $\mathbb{Z}G$-Modul, der $\mathbb{Z}$-torsionsfrei ist. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}G$-Modul $P \otimes_{\mathbb{Z}} M$ (wie schon in der Vorlesung gesehen, ist die G-Struktur hierauf durch die Diagonaloperation gegeben) flach ist – d.h. der Funktor $(P \otimes_{\mathbb{Z}} M) \otimes_{\mathbb{Z}G} \_$ ist exakt.
(b) Seien P ein projektiver $\mathbb{Z}G$-Modul und M ein $\mathbb{Z}G$-Modul, der $\mathbb{Z}$-frei ist. Dann ist der $\mathbb{Z}G$-Modul $P \otimes_{\mathbb{Z}} M$ projektiv – d.h. der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P \otimes_{\mathbb{Z}} M, \_)$ ist exakt.

$\leq$3 Punkte

(14) *H^1 und Derivationen.*
Seien G eine Gruppe und M ein $\mathbb{Z}G$-Modul. Eine *Derivation* von G auf M ist eine Funktion $d : G \to M$, so dass $d(gg') = d(g) + gd(g')$, für alle $g, g' \in G$. Diese bilden eine abelsche Gruppe.
Benutzen Sie den Bar-Kokettenkomplex $K_{\mathrm{bar}}(G; M)^{\bullet}$ zu zeigen, dass $H^1(G; M)$ isomorph zu der Gruppe der Derivationen von G auf M modulo Hauptderivationen ist (diese sind Derivationen d von der Form $d(g) := gx - x$ für alle $g \in G$ und $x \in M$ fest).
Insbesondere, ist die Wirkung von G auf M trivial, dann $H^1(G; M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G; M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{\mathrm{ab}}; M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(G); M)$.

$\leq$4 Punkte

(15) *Hilfreiche k.e.Sequenzen.*
Sei A eine abelsche Gruppe mit trivialer G-Wirkung.
(a) Zeigen Sie, dass für ein G-Modul P: $P \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong P_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$, und $\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G}(P, A) \cong \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(P_G, A)$.
(b) Leiten Sie aus (15a) folgende exakte Sequenzen:

$$0 \longrightarrow H_n(G) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow H_n(G; A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G), A) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G), A) \longrightarrow H^n(G, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(G), A) \longrightarrow 0.$$

$\leq$5 Punkte

(16) Ind *und* Res.
Seien G eine Gruppe, H eine Untergruppe, M ein H-Modul und N ein G-Modul. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_H^G M \cong \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G N \otimes_{\mathbb{Z}} M),$$

wobei die Tensorprodukten die Diagonalwirkung haben (das auf der linken Seite von G, das auf der rechten Seite von H).

$\leq$4 Punkte