GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT V

$\leq$ 23.5.2013

(17) *Projektive und injektive Moduln.*

Sei B eine A-Algebra vemöge des Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B$.

(a) Ist P ein projektiver A-Modul, dann ist $\mathrm{Ind}_\alpha P$ ein projektiver B-Modul – benutzen Sie die *(UE Res-Ind)* zu zeigen, dass $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Ind}_\alpha P, \_)$ exakt ist.

(b) Ist I ein injektiver A-Modul, dann ist $\mathrm{Coind}_\alpha I$ ein injektiver B-Modul.

(c) Die Skalarrestriktion Res_α bildet projektive B-Moduln auf projektive A-Moduln, falls B ein projektiver A-Modul ist[1].

$\leq$3 Punkte

(18) Ind_H^G *und* Coind_H^G.

(a) Seien G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe mit $[G : H] = \infty$. Dann gilt $(\mathrm{Ind}_H^G M)^G = 0$ für jeden $\mathbb{Z}H$-Modul M.

(b) [2] Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $(\mathrm{Coind}_H^G M)_G = 0$ für alle H-Moduln M,
- das von der Augmentation ϵ definierte Element in $(\mathrm{Coind}_H^G \mathbb{Z})_G$ ist Null.

$\leq$2 Punkte

(19) *Auflösungen.*

(a) Seien G eine Gruppe, M ein $\mathbb{Z}G$-Modul, und $C_\bullet : \ldots \to C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ eine lange exakte Sequenz von $\mathbb{Z}G$-Moduln, wobei C_i homologisch azyklisch ist für jedes i. Dann gilt $H_\star(G, M) \cong \mathbb{H}_\star({C_\bullet}_G)$[3].

(b) Seien G eine Gruppe, M ein $\mathbb{Z}G$-Modul, und $0 \to M \to C^0 \to C^1 \to \ldots : C^\bullet$ eine lange exakte Sequenz von $\mathbb{Z}G$-Moduln, wobei jeder G-Modul C^i kohomologisch azyklisch ist. Dann $H^\star(G, M) \cong \mathbb{H}^\star({C^\bullet}^G)$.

$\leq$4 Punkte

(20) *Eine Beschreibung von Shapiros-Lemma-Isomorphismen.*

Seien $\alpha : H \hookrightarrow G$ die kanonische Inklusion von der Untergruppe H in G, M ein $\mathbb{Z}H$-Modul, $\iota : M \to \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G M$ und $\pi : \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Coind}_H^G M \to M$ die "Strukturabbildungen" bei den universellen Eigenschaften aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass die Isomorphismen in Shapiros Lemma folgenden entsprechen: $(\alpha, \iota)_\star : H_\star(H, M) \to H_\star(G, \mathrm{Ind}_H^G M)$ und $(\alpha, \pi)^\star : H^\star(G, \mathrm{Coind}_H^G M) \to H^\star(H, M)$.

$\leq$4 Punkte

[1] Insbesondere gilt dann die Aussage für die Gruppenringe $A := \mathbb{Z}H$ und $B := \mathbb{Z}G$, $H \subset G$, denn in diesem Falle ist B sogar frei über A.

[2] Diese nicht-triviale Teilaufgabe vergibt nur Zusatzpunkte, die David am Freitag bekanntgeben wird.

[3] Benutzen Sie rekursiv das Dimensionsverschiebungsargument, am Anfang mithilfe von folgenden kurzen exakten Sequenzen $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\epsilon \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ und $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\epsilon \longrightarrow 0$.