DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT VII

$\leq$ 6.6.2013

(25) *Die universelle Derivation.*

Seien G eine Gruppe, I das Augmentationsideal in $\mathbb{Z}G$, und $D : G \to I$ die Derivation definiert durch $D(g) := g - 1$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass D eine *universelle Derivation auf* G ist; d.h. für jede G-Modul A und jede Derivation $d : G \to A$, gibt es einen eindeutigen G-Modulhomomorphismus $\tau : I \to A$, so dass $d = \tau \circ D$ (und somit $\mathrm{Der}(G, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I, A)$).[1]

$\leq$3 Punkte

(26) *Derivationen und Erweiterungen.*

Sei $G = \langle S \rangle$ die durch die Elementen der Menge S erzeugte freie Gruppe.

(a) Sei A ein G-Modul und $\{a_s\}_{s\in S}$ eine Familie von Elementen aus A. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Derivation $d : G \to A$ gibt, so dass $d(s) = a_s$ für alle $s \in S$.[2] Leiten Sie hieraus und aus (25) ab, dass das Augmentationsideal $I \subset \mathbb{Z}G$ ein freier $\mathbb{Z}G$-Modul mit Basis $\{D_s\}_{s\in S}$ ist.

(b) Seien $T \subset G$ eine Untermenge, N der normale Abschluss von T in G, und $G' := G/N$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Der}(G', A)$ der Menge solcher Derivationen $d : G \to A$ aus $\mathrm{Der}(G, A)$ entspricht, die $d(T) = 0$ erfüllen.

$\leq$4 Punkte

(27) *Explizite Berechnung von* $\mathscr{E}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

Seien $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $A := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ als G-Modul mit der nicht trivialen Wirkung von G. Geben Sie explizit (durch Erzeuger und Relationen) für jede Äquivalenzklasse f von 2-Kozykeln (modulo Koränder[3]) die entsprechende Gruppenerweiterung $A \rtimes_f G$ an.

$\leq$5 Punkte

(28) *Eigenschaften von Erweiterungen.*

(a) Seien $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ eine Erweiterung, $\alpha : G' \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass es eine Erweiterung $0 \longrightarrow A \longrightarrow E' \longrightarrow G' \longrightarrow 1$ gibt, die (bis auf Äquivalenz) durch folgendes Diagram bestimmt ist:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Id}_A"', "\cong"] & E' \arrow[r] \arrow[u] & G' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"'] & 1.
\end{tikzcd}$$

[1] Hinweis: Dehnen Sie mithilfe von der Augmentationsabbildung die Derivation d zu einer additiven Abbildung $\tilde{d} : \mathbb{Z}G \to A$ und dann schränken Sie diese erweiterte Abbildung auf I ein.

[2] Benutzen Sie die Entsprechung zwischen Derivationen und Spaltungsabbildungen von $0 \longrightarrow A \longrightarrow A \rtimes G \longrightarrow G \longrightarrow 1$.

[3] Denn zwei äquivalente Kozykel geben Erweiterungen, die isomorph zueinander sind – werden wir am kommenden Dienstag sehen.

(b) Seien $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ eine Erweiterung, $\varphi : A \to A'$ ein G-Modulhomomorphismus. Zeigen Sie, dass es eine Erweiterung $0 \longrightarrow A' \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow 1$ gibt, die (bis auf Äquivalenz) durch folgendes Diagram bestimmt ist:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G"', "\cong"] & 1 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

≤4 Punkte