DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

SS 2013

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT VIII

$\leq$ 13.6.2013

(29) *Eigenschaften von Erweiterungen (contd').*

(a) Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus $\alpha : G' \to G$ aus der Übungsaufgabe (28.a) eine Abbildung $\mathscr{E}(G, A) \to \mathscr{E}(G', A)$ induziert, die dem Gruppenhomomorphismus $H^2(\alpha, A) : H^2(G, A) \to H^2(G', A)$ entspricht (unter Berücksichtigung der Bijektion aus Proposition $3'$ in der Vorlesung).

(b) Entsprechend zur Aufgabe (28.b): der Modulhomomorphismus $f : A \to A'$ induziert eine Abbildung $\mathscr{E}(G, A) \to \mathscr{E}(G, A')$, die unter Identifikation von $\mathscr{E}(G, A)$ mit $H^2(G, A)$ (bzw. $\mathscr{E}(G, A')$ mit $H^2(G, A')$) dem Gruppenhomomorphismus $H^2(G, f) : H^2(G, A) \to H^2(G, A')$ entspricht.

$\leq$3 Punkte

(30) *Erweiterungen von G durch N, mit $Z(N) = 1$.*

Zeigen Sie, dass für jeden Homomorphismus $\psi : G \to \operatorname{Out} N$ die Menge $\mathscr{E}(G, N; \psi)$ ein einziges Element hat, wenn das Zentrum von der Gruppe N trivial ist.[1]

$\leq$4 Punkte

(31) *Überbleibsel aus der Vorlesung.*

Seien $(G, N; \psi)$ ein abstrakter Kern, $\tilde{\psi} : G \to \operatorname{Aut} N$ eine Liftung (-sfunktion) von ψ, und $f : G \times G \to N$ eine Funktion, so dass (Gl.1) und (Gl.2) aus der Vorlesung gelten.

(a) Die Funktionen $\tilde{\psi}$ und f sind hier nicht als *normiert* vorausgesetzt. Definieren Sie dann die Gruppenstruktur bzw. das Neutralelement $1_{N \rtimes_{\tilde{\psi}, f} G}$.

(b) Geben Sie explizit die Inverse von (n, g) an.[2]

(c) Geben Sie ein konkretes Beispiel von einem abstakten Kern, zu dem keine Erweiterung gehört.

$\leq$5 Punkte

(32) *Explizite Erweiterungen mit N nicht abelsch.*

Seien $N := \{a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1}\}$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Aut} N = \mathfrak{S}_4$, $\operatorname{Out} N = \mathfrak{S}_3$. Wählen Sie nun einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus $\psi : G \to \operatorname{Out} N$ (d.h. konstruieren einen abstrakten Kern $(G, N; \psi)$, mit ψ nicht-trivial). Berechnen Sie dann $\mathscr{E}(G, N; \psi)$.[3]

$\leq$7 Punkte

---

[1] Benutzen Sie Aufgabe (29.a) mit einer Erweiterung $\underline{E}$ und der exakten Sequenz $0 \longrightarrow N \longrightarrow \xrightarrow{\operatorname{Out} N} \operatorname{Aut} N \longrightarrow 0$.

[2] In der Vorlesung, denke ich, habe ich $(n, g)^{-1} = ({}^{\tilde{\psi}(g^{-1})}n^{-1} f(g^{-1}, g)^{-1}, g^{-1})$. Das ist nicht richtig, wie man es leicht nachprüfen kann. Da habe ich versehentlich die Faktoren vertauscht! Also, $(n, g)^{-1} = (f(g^{-1}, g)^{-1}\, {}^{\tilde{\psi}(g^{-1})}n^{-1}, g^{-1})$ – was Sie eigentlich in der Aufgabe nachprüfen müssen.

[3] Geben Sie explizite Erweiterungen an (wenn es welche gibt..)!