DR. J. M. CERVIÑO
D. GUIRAUD

GRUPPENKOHOMOLOGIE

ÜBUNGSBLATT IX

$\leq$ 20.6.2013

(33) *Erweiterungen (contd').*

Seien $[\underline{E}] \in \mathscr{E}(G,N;\psi)$ und σ ein Schnitt von $\underline{E}$, der das Paar $(\tilde{\psi}, f)$ induziert. Wir haben schon gesehen, dass dann $\underline{E} \cong \underline{E}_{\tilde{\psi},f}$, wobei Letzteres die Erweiterung ist, die zu $N \rtimes_{\tilde{\psi},f} G$ gehört. Zeigen Sie, dass für jeden Korand $f_0 \in B^2_{\mathrm{std}}(G,A)$, die Erweiterung $\underline{E}_{\tilde{\psi},f_0 f}$ isomorph zu $\underline{E}_{\tilde{\psi},f}$ (bzw. $\underline{E}$) ist.

$\leq$4 Punkte

(34) *Homologische Algebra (contd').*

Seien A ein Ring (assoziativer, mit Einselement), $C_\bullet$, $C'_\bullet$ zwei Komplexen von A-Rechtsmoduln, $E_\bullet$, $E'_\bullet$ zwei Komplexen von A-Linksmoduln.

(a) Bezeichnet D das Differential auf dem entsprechenden $\mathscr{H}om$, dann ist das *Tensorprodukt von Funktionen* – zur Erinnerung, dieses ist durch $\langle u \otimes v, x \otimes x' \rangle := (-1)^{\deg v \deg x} \langle u, x \rangle \otimes \langle v, x' \rangle$ gegeben – eine Kettenabbildung[1]

$$\mathscr{H}om_A(C_\bullet, C'_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{H}om_A(E_\bullet, E'_\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(C_\bullet \otimes_A E_\bullet, C'_\bullet \otimes_A E'_\bullet).$$

(b) Ist $u : C_\bullet \to C'_\bullet$ eine Kettenabbildung (vom Grad 0), dann ist $u \otimes \_ : \mathscr{H}om_A(E_\bullet, E'_\bullet) \to \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(C_\bullet \otimes_A E_\bullet, C'_\bullet \otimes_A E'_\bullet)$ eine Kettenabbildung.

(c) Leiten Sie aus (a) ab (oder zeigen Sie direkt) folgende Aussage: Seien $u_0, u_1 : C_\bullet \to C'_\bullet$ und $v_0, v_1 : E_\bullet \to E'_\bullet$ Kettenabbildungen, die jeweils homotop zueinander sind (d.h. $v_0 \sim v_1$ und $u_0 \sim u_1$), dann sind $u_0 \otimes v_0, u_1 \otimes v_1 : C_\bullet \otimes_A E_\bullet \to C'_\bullet \otimes_A E'_\bullet$ homotop.

$\leq$5 Punkte

(35) *Überbleibsel aus der Vorlesung.*

Zeigen Sie, dass die Alexander-Whitney Abbildung $\Delta_\bullet : C^{\mathrm{std}}_\bullet \to C^{\mathrm{std}}_\bullet(G) \otimes_{\mathbb{Z}} C^{\mathrm{std}}_\bullet(G)$ eine diagonale Approximation ist.[2]

$\leq$3 Punkte

(36) *Eine weitere diagonale Approximation.*

Seien G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung m mit Erzeuger g_0 und $P_\bullet$ die zugehörige periodische Auflösung von $\mathbb{Z}$ als trivialer $\mathbb{Z}[G]$-Modul (insb. $P_n = \mathbb{Z}[G]$ für alle $n \geq 0$). Definieren wir $\Delta : P_\bullet \to P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} P_\bullet$ so, dass die Komponente $\Delta_{(p,q)}$ von Δ_n in $P_p \otimes_{\mathbb{Z}} P_q$ (für $p+q=n$) folgendermaßen gegeben ist:

$$\Delta_{(p,q)}(1) = \begin{cases} 1 \otimes 1 & \text{falls } p \text{ gerade,} \\ 1 \otimes g_0 & \text{falls } p \text{ ungerade und } q \text{ gerade,} \\ \sum_{0 \leq i < j \leq m-1} g_0^i \otimes g_0^j & \text{fall } p \text{ ungerade, } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dieses Δ eine diagonale Approximation ist.

$\leq$4 Punkte

[1] Hinweis: Wenden Sie das Differential auf beide Seiten der definierenden Gleichung des o.g. Tensorproduktes an.

[2] Ich denke, heute stand ein Plus anstelle vom zweiten Minus in $\Delta_0((g_1)-(g_0)) = (g_1) \otimes (g_1) - (g_0) \otimes (g_0)\ldots$