Algebraische Gruppen — Übungsblatt 1
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño — Abgabe: Di. 29.04.2014 um 9:00 Uhr

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

1. Aufgabe (Dimension, 2 Punkte): Sei X eine k-Varietät. Die Dimension $\dim X$ von X ist definiert als die maximale Länge n einer aufsteigenden Kette $Y_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n$ abgeschlossener, irreduzibler Teilmengen von X. Man zeige:

(a) Es gilt $\dim X = \dim U$, für U eine geeignete affine, offene Teilmenge von X.

(b) Ist $X = \operatorname{Max} A$ affin, dann ist $\dim X$ gleich der Krullschen Dimension $\dim A$.

Bemerkung: Aus dieser Aufgabe und den Übungen vom 16.04. folgt, dass jede k-Varietät endliche Dimension hat.

2. Aufgabe (Konstruierbarkeit, 1+1+2+1+1 Punkte): In dieser Aufgabe wird der folgende Satz von Chevalley gezeigt: Sei $\phi : X \to Y$ ein Morphismus von k-Varietäten. Dann enthält $\phi(X)$ eine Teilmenge U, die offen und dicht im Abschluss von $\phi(X)$ in Y ist.

(a) Es genügt den obigen Satz mit folgenden Einschränkungen zu beweisen:

- Y ist der Abschluss von $\phi(X)$,
- Y ist irreduzibel,
- X und Y sind affin.

Im Folgenden setzen wir diese Eigenschaften o.B.d.A. im Satz voraus.

(b) Sei nun $X = \operatorname{Max} A$, $Y = \operatorname{Max} B$ und $\phi^* : B \to A$ der von ϕ induzierte Morphismus affiner k-Algebren. Man folgere aus der Dichte von $\phi(X)$ in Y, dass ϕ^* injektiv ist. [Die Umkehrung gilt ebenfalls.]

(c) Sei K der Quotientenkörper von B, $C := A \otimes_B K$ und $\phi^*_K : K \to C$ der von ϕ^* induzierte Morphismus. Man folgere aus dem Noetherschen Normalisierungslemma (NNL, s.u.), dass es ein $b \neq 0$ aus B und $u_1, \ldots, u_d$ aus $A_{\phi^*(b)}$ gibt, so dass folgendes gilt:

(i) $K[u_1, \ldots, u_d] \to C$ ist endlich,

(ii) $u_1, \ldots, u_d$ sind algebraisch unabhängig über K,

(iii) $B_b[u_1, \ldots, u_d] \to A_{\phi^*(b)}$ ist injektiv und endlich (und insbesondere ganz).

Hinweis: Das NNL angewandt auf $K \to C$ gibt Elemente $u_1, \ldots, u_d \in C$, welche schon in $A \otimes_B B_b$ definiert sind für geeignetes $b \in B$. Die resultierende Abbildung sieht aus wie die in (c.iii), muss aber (noch) nicht injektiv sein.

(d) Die Abbildung $\operatorname{Max} A_{\phi^*(b)} \to \operatorname{Max}(B_b[u_1, \ldots, u_d])$ induziert von (c.iii) ist surjektiv (*going-up* Theorem) ebenso wie die Abbildung $\operatorname{Max}(B_b[u_1, \ldots, u_d]) \to \operatorname{Max} B_b$ induziert von der Inklusion $B_b \to B_b[u_1, \ldots, u_d]$.

(e) Man beweise den oben angegebenen Satz von Chevalley.

Hinweis: Das NNL besagt, dass jede k-Algebra vom endlichen Typ ganz und endlich als Modul über einer (endlichen) freien k-Algebra ist. Konkret: Sei k ein Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann gibt es über k algebraisch unabhängige Elemente $u_1, \ldots, u_d$ aus A, so dass A eine ganze Algebra über $A_0 := k[u_1, \ldots, u_d]$ (auch endlich als A_0-Modul) ist.

3. Aufgabe (Zur Produkt(prä)varietät, 4 Punkte): Seien X, Y Prävarietäten. Sei Z eine Prävarietät und seien $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ Morphismen von Prävarietäten. Man zeige:

(a) Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung einer Prävarietät W. Sei V eine Prävarietät und seien $\phi_i : U_i \to V$ Morphismen von Prävarietäten für alle $i \in I$. Gilt $\phi_i |_{U_i \cap U_j} = \phi_j |_{U_i \cap U_j}$ für alle Paare $(i, j) \in I^2$, so existiert ein eindeutiger Morphismus $\phi : W \to V$ von Prävarietäten, so dass $\phi |_{U_i} = \phi_i$ für alle $i \in I$ gilt.

(b) Die Prävarietät Z erfüllt die universelle Eigenschaft des Produktes von X und Y genau dann, wenn sie es für alle affinen Varietäten erfüllen, d.h. für alle affinen Varietäten U und alle Paare von Morphismen von Prävarietäten $p' : U \to X$ und $q' : U \to Y$ existiert ein eindeutiger Morphismus $\psi : U \to Z$, so dass $p' = p \circ \psi$ und $q' = q \circ \psi$ gilt.

(c) Für einen topologischen Raum S bezeichne $|S|$ die unterliegende Menge. Ist (Z, p, q) das Produkt von X und Y, so ist die Abbildung $|Z| \xrightarrow{(p,q)} |X| \times |Y|$ eine Bijektion.

(d) Seien $W \subset X$ und $V \subset Y$ abgeschlossene Teilmengen. Dann ist $W \times V \subset X \times Y$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sind insbesondere X und Y Varietäten, und sei Z das Produkt von X und Y, dann ist Z eine Varietät.

Hinweis zu (d): Sie dürfen ohne Beweis folgende Aussage verwenden: Ist U_i eine offene (z.B. affine) Überdeckung von X und U_i' eine offen Überdeckung von Y, so ist $U_i \times U_i'$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$.
