Algebraische Gruppen — Übungsblatt 2
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño Abgabe: Di. 06.05.2014 um 9:00 Uhr

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

4. Aufgabe (Projektive Varietäten, 2 Punkte): Sei $R = k[S_0, \dots, S_3]$ der homogene Koordinatenring von $\mathbb{P}^3_k$. Für $i = 0, \dots, 3$ sei U_i die offene affine Karte von $\mathbb{P}^3_k$, auf der $S_i \neq 0$ gilt; d.h. $U_i = \mathrm{Max}(k[T_{0/i}, \dots, T_{3/i}])$.

(a) Sei $Z := V^*(I) \subset \mathbb{P}^3_k$ die Nullstellenmenge zum Ideal $I = (S_0^4 + S_1^4 + S_2^4 + S_3^4) \subset R$. Beschreiben Sie die Schnitte $U_i \cap Z$ als Teilmengen von $\mathbb{A}^3_k \cong U_i$ und geben Sie jeweils den Koordinatenring an.

(b) Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $k[U_i] \otimes k[U_j] \to k[U_i \cap U_j]$, $f \otimes g \mapsto f\,|_{U_i \cap U_j} \cdot g\,|_{U_i \cap U_j}$ für $i \neq j$ ein surjektiver k-Algebrenhomomorphismus ist.

5. Aufgabe (Die Segre Einbettung, 2 Punkte): Wie in der Vorlesung seien die projektiven Koordinaten von $\mathbb{P}^{mn+m+n}_k$ beschrieben durch Tupel $(z_{ij})_{i=0,\dots,n;j=0,\dots,m}$. Sei $\phi : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k \to \mathbb{P}^{mn+m+n}_k$ die Abbildung gegeben durch $((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_m)) \mapsto (x_i y_j)_{i=0,\dots,n;j=0,\dots,m}$. Man zeige:

(a) Die Abbildung ϕ ist injektiv und ihr Bild liegt in der abgeschlossenen Untervarietät $Z = V^*(I)$ von $\mathbb{P}^{mn+m+n}_k$ für I das von $\{z_{ij} z_{i'j'} - z_{ij'} z_{i'j} \mid i, i' = 0, \dots, n; j, j' = 0 \dots, m\}$ erzeugte homogene Ideal in $k[z_{ij} \mid i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, m]$.

(b) Es gilt $Z = \mathrm{Bild}(\phi)$.

Hinweis: Sei W_{ij} die Teilmenge von Z auf der $z_{ij} \neq 0$ gilt, d.h., die W_{ij} sind die Durchschnitte der standard-affinen Teilmengen von $\mathbb{P}^{mn+m+n}_k$ mit Z. Seien $U_i \subset \mathbb{P}^n_k$ und $V_j \subset \mathbb{P}^m_k$ die durch $x_i \neq 0$ bzw. $y_j \neq 0$ gegebenen standard-affinen Teilmengen. Zeigen Sie zunächst $U_i \times V_j \xrightarrow[\phi_{ij}]{\cong} W_{ij}$.

6. Aufgabe (Untergruppen linearer algebraischer Gruppen, 1+1+3 Punkte): Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Seien X, Y zwei affine Varietäten und $f : X \to Y$ ein Morphismus. Dann faktorisiert f über den Abschluß $\overline{f(X)}$ von $f(X)$ in Y; d.h., es existiert ein Morphismus $f' : X \to \overline{f(X)}$ mit $\iota \circ f' = f$, wobei $\iota : \overline{f(X)} \hookrightarrow Y$ die natürliche Inklusion ist.

(b) Sei G eine algebraische Gruppe und $H \hookrightarrow G$ eine abgeschlossene Untervarietät, so dass $H(k)$ eine Untergruppe $G(k)$ ist (vermöge der angegebenen Inklusion). Dann ist die Einschränkung der Multiplikation auf G nach H ein Morphismus von k-Varietäten $\mu|_{H\times H}\colon H \times H \to H$, und die Einschränkung der Inversen Abbildung auf G nach H ein Morphismus $i\,|_H\colon H \to H$, so dass H mit diesen Morphismen eine algebraische Gruppe ist.

(c) Seien G eine lineare algebraische Gruppe und H eine Untergruppe. Dann gelten:

(i) Der Abschluss $\overline{H}$ von H in G ist eine (abgeschlossene) Untergruppe von G.

(ii) Umfasst H eine offene Teilmenge von $\overline{H}$, so gilt $H = \overline{H}$.

Hinweis zu (i): Zeigen Sie zuerst $x\overline{H} \supset \overline{H}$ für alle $x \in H$.
Hinweis zu (ii): Überlegen Sie zunächst, dass $H \subset \overline{H}$ offen ist.

7. Aufgabe (Zwei Beispiele linearer algebraischer Gruppen, 4 Punkte): Sei $\mathbb{D}_n \subset \mathrm{GL}_n$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen. Sei $\mathrm{GSp}_{2n} \subset \mathrm{GL}_{2n}$ die Untergruppe der Matrizen, die die symplektische Standardform bis auf Homothetie erhält, d.h., $\mathrm{GSp}_{2n} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid \exists \lambda \in k^* : AJA^t = \lambda J\}$ für $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$. Sei im weiteren H eine der beiden Gruppen $\mathbb{D}_n$ bzw. GSp_{2n}.

(a) Beschreiben Sie für die beiden obigen H die Hopfalgebra und die Komultiplikationsabbildung.
Hinweis: Verwenden Sie, dass H abgeschlossene Untervarietät einer affinen Varietät (GL_N) ist, sowie die bekannten Formeln für die Komultiplikation auf GL_N; siehe auch (6.a), (6.b).

(b) Geben Sie für beide Gruppen H die zugehörigen gruppen-wertigen Funktoren auf der Kategorie der affinen k-Algebren an.

(c) Finden Sie injektive Homomorphismen linearer algebraischer Gruppen $\mathbb{D}_n \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}$ und $\mathbb{D}_{n+1} \hookrightarrow \mathrm{GSp}_{2n}$; hierbei ist $\mathrm{Sp}_{2n} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid AJA^t = J\}$.

8. Zusatzaufgabe ($\mathbb{A}^1$ mit einem verdoppelten Punkt, 2 Zusatzpunkte): Seien $(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ und $(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ zwei affine Geraden über k – wir schreiben $X_i := \operatorname{Max} k[T_i]$. Sei $o_i = V(T_i) \in X_i$ der Koordinatenursprung und setze $U_i := X_i \setminus o_i = \operatorname{Max} k[T_i, 1/T_i]$ als offene affine Untervarietät von X_i. Seien $\phi_{ij} : U_i \xrightarrow{\cong} U_j$ die Isomorphismen bestimmt durch $T_j \mapsto T_i$, für $i \neq j \in \{1, 2\}$. Wir verkleben X_1 und X_2 entlang $U_1 \cong U_2$ (vermöge der ϕ_{ij}'s) zu einer Prävarietät $(X, \mathcal{O}_X)$.

(a) Berechnen Sie den Ring der globalen Schnitte auf X, d.h. den Ring $\mathcal{O}_X(X)$.

(b) Zeigen Sie, dass X keine Varietät ist, indem Sie nachweisen, dass

  (i) die Diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ nicht abgeschlossen ist;

  (ii) das 'Varietätskriterium' (vgl. (4.b)) für die offene affine Überdeckung $X = X_1 \cup X_2$ nicht erfüllt ist.
