Algebraische Gruppen — Übungsblatt 3
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño Abgabe: Di. 13.05.2014 um 9:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

9. Aufgabe (Morphismen von Hopf-Algebren und Hopf-Ideale, 3 Punkte): Seien G, H lineare algebraische Gruppen und $A = k[G]$, $B := k[H]$ die zugehörigen Hopf-Algebren. Man zeige:

(a) Die Gruppe G ist kommutativ genau dann, wenn $\Delta_A = \tau \circ \Delta_A$ gilt, wobei $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ der k-Algebrenhomomorphismus ist, der von $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ induziert wird.

(b) Ein k-Morphismus $\phi : G \to H$ ist ein Homomorphismus algebraischer Gruppen genau dann, wenn der induzierte Morphismus $\phi^* : B \to A$ folgende Eigenschaften besitzt:

(i) ϕ^* ist ein k-Algebrenhomomorphismus,

(ii) ϕ^* ist mit der Comultiplikation verträglich, d.h. $\Delta_A \circ \phi^* = (\phi^* \otimes \phi^*) \circ \Delta_B$.

(c) Sei nun Z eine abgeschlossene Untervarietät von G mit Verschwindungsideal $I(Z)$. Dann gilt: Z ist eine Untergruppe von G genau dann, wenn $\iota(I(Z)) \subset I(Z), \epsilon(I(Z)) = 0$ and $\Delta_A(I(Z))$ in $A \otimes I(Z) + I(Z) \otimes A$ enthalten ist.

Bemerkung: Ein k-Algebrenhomomorphismus wie in (b) heißt *Hopf-Algebrenhomomorphismus*; ein Ideal wie in (c) heißt *Hopf-Ideal*.

10. Aufgabe (Die orthogonale Gruppe und ihre Einskomponente, 1+2 Punkte): Es gelte $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Für $\mathrm{O}_n(k) := \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid A^{\mathrm{t}}A = 1_n\} \supset \mathrm{SO}_n(k) := \{A \in \mathrm{SL}_n(k) \mid A^{\mathrm{t}}A = 1_n\}$ zeige man:

(a) O_n und SO_n sind algebraische Gruppen. Die orthogonale Gruppe O_n ist nicht zusammenhängend.

(b) Die spezielle orthogonale Gruppe SO_n ist die Einskomponente von O_n.
Hinweis: Die Abbildung $A \mapsto (1+A)^{-1}(1-A)$ definiert einen Isomorphismus zwischen einer offenen, nicht leeren Untervarietät von SO_n und einer offenen Untervarietät der schief-symmetrischen Matrizen der Dimension n.

11. Aufgabe (Die Gruppe PGL_2, 5 Punkte): Es gelte $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(k)$ operiert treu auf $V = k^2$ vermöge der Standarddarstellung $(g, v) \mapsto gv$. Die adjungierte Darstellung von G auf $\mathrm{End}_k(V) \cong k^4$ ist die Darstellung $(g, f) \mapsto gfg^{-1}$. Sei W der (3-dimensionale) Untervektorraum der Spur Null Matrizen in $\mathrm{End}_k(V)$. Dann lässt die adjungierte Darstellung von G den Vektorraum W invariant. Mit anderen Worten, man hat einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{GL}(W)$. Im Weiteren betrachten wir stets die Basis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ von W. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Gruppenhomomorphismus ϕ definiert einen Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen $\mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_3$.
Hinweis: Es darf ein Computeralgebra-System fürs Matrizenrechnen verwendet werden.

(b) (i) Der Kern von ϕ besteht aus den Skalarmatrizen. Er ist isomorph zu $\mathbb{G}_m$.

(ii) Das Bild von ϕ liegt in SL_3.
Hinweis: Man rechne dies direkt nach, oder benutze, dass $\mathrm{End}_k(V) \cong V \oplus V^\vee$.

(c) Man überlege, dass der Unterring der Grad Null Elemente der Hopf-Algebra $A := k[\mathrm{GL}_2] = k[a, b, c, d]_{(ad-bc)}$ mit dem Koordinatenring der affinen offenen Teilmenge $D^*(x_0x_3 - x_1x_2) \subset \mathbb{P}^3$ übereinstimmt. Insbesondere bilden die Grad Null Elemente von A einen Unterring.

(d) Das Bild von ϕ lässt sich mit $D^*(x_0x_3 - x_1x_2)$ identifizieren: Geben Sie dazu die Abbildung affiner k-Algebren $k[\mathrm{GL}_3] \to A$, induziert von der Abbildung aus (a), explizit an und zeigen Sie, dass dieser Homomorphismus über den Unterring der Grad Null Elemente faktorisiert.

(e) Wir bezeichnen mit PGL_2 das Bild von ϕ. Man zeige, dass die Verkettung $\mathrm{SL}_2 \xrightarrow{\text{kanonische Inkl.}} \mathrm{GL}_2 \to PGL_2$ surjektiv ist und dass ihr Kern die Ordnung 2 hat und das Zentrum von SL_2 bildet. Begründen Sie auch, dass PGL_2 zusammenhängend ist.

12. Aufgabe (Die symplektische Gruppe, 2 Punkte): Zeigen Sie, dass die symplektische Gruppe Sp_{2n} zusammenhängend ist.
Hinweis: Benutzen Sie aus [JacI, p. 392], dass Sp_{2n} durch symplektischen Transvektionen erzeugt wird, sowie ein Kriterium aus der Vorlesung.

Bemerkung: Ersetzt man [JacI, p. 392] durch [JacI, p. 371], so liefert die in Aufgabe 12 vorgeschlagene Methode einen weiteren Beweis dafür, dass die spezielle orthogonale Gruppe SO_n zusammenhängend ist.

Literatur

[JacI] N. Jacobson, *Basic algebra. I*, second edition, Freeman, New York, 1985.