Algebraische Gruppen — Übungsblatt 4
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño Abgabe: Di. 20.05.2014 um 11:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

13. Aufgabe (G-Mengen, 2 Punkte): Seien G eine zusammenhängende algebraische Gruppe und X ein G-Raum (d.h. eine Varietät mit einer G-Operation $\tau : G \times X \to X$). Man zeige:

(a) Die Gruppe G fixiert die irreduziblen Komponenten von X.

(b) Ist N eine endliche normale Untergruppe von G, dann liegt N im Zentrum von G.

14. Aufgabe (GL_n-Räume, 2+1+1 Punkte): (a) Die Standarddarstellung von GL_n auf k^n ist linear (also, homogen von Grad 1). Daher induziert sie eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_n(k)$ auf der Menge $\mathbb{P}^{n-1}(k) = (k^n \setminus \{0\})/k^\times$. Zeigen Sie, dass diese Operation durch einen algebraischen Morphismus $\mathrm{GL}_n \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ gegeben ist.
Hinweis: Das zu umgehende Problem ist, dass die Varietät $\mathrm{GL}_n \times \mathbb{P}^{n-1}$ nicht affin ist. Für eine standard-offene Untermenge $D^*(T_{i_0}) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ (vom Zielbereich), überdecken Sie das Urbild mit entsprechenden offenen affinen Teilmengen von $\mathrm{GL}_n \times \mathbb{P}^{n-1}$, worauf sich die Abbildung durch *“Matrizenmultiplikation”* beschreiben und nach dem Garbenaxiom verkleben lässt.

(b) Bestimmen Sie die Bahnen der Operation von GL_n auf $\mathbb{A}^n$ und auf $\mathbb{P}^{n-1}$. Bestimmen Sie für $(1, 0, \ldots, 0)$ (bzw. $(1 : 0 : \ldots : 0)$) den jeweiligen Stabilisator in GL_n.

(c) Bestimmen Sie die Bahnen von GL_n auf $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ (mit der Diagonaloperation).

15. Aufgabe (Jordanzerlegung, 4 Punkte): Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Seien V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}_k(V)$. Sei $\prod_i (T - a_i)^{e_i}$ das charakteristische Polynom von α mit paarweise verschiedenen a_i aus k. Sei $p_s \in k[T]$ das Polynom vom Grad $\dim V$, mit $p_s(T) \equiv a_i \pmod{(T - a_i)^{e_i}}$ für alle i. Dann ist $p_s(\alpha)$ halbeinfach und $p_n(\alpha) := \alpha - p_s(\alpha)$ nilpotent, und es gelten $\alpha = p_s(\alpha) + p_n(\alpha)$, $p_s(\alpha)p_n(\alpha) = p_n(\alpha)p_s(\alpha)$.

(b) Seien $g, h \in G$ mit $gh = hg$. Dann gelten $(gh)_? = g_? h_?$ für $? \in \{s, u\}$ (mit g_s, g_u wie in der Vorlesung).

(c) Beschreiben Sie die unipotenten Elemente in G für $G = \mathbb{G}_\mathrm{a}$ und $G = \mathrm{GL}_2$.

(d) Die Teilmenge $G_\mathrm{u} := \{g \in G \mid g = g_u\}$ ist abgeschlossen in G.

16. Aufgabe (Isomorphismen algebraischer Gruppen, 1+1+2* Punkte): In (a) sei $\phi : X \to Y$ ein Morphismus affiner algebraischer k-Varietäten. In (b) und (c) seien X, Y zusätzlich algebraische Gruppen und ϕ ein Gruppenhomomorphismus. Wir setzen stets voraus, der Morphismus ϕ eine Bijektion $X(k) \xrightarrow{\sim} Y(k)$ induziert.

(a) Finden Sie (für jeden Körper k) ein Tupel (X, Y, ϕ), so dass ϕ kein Isomorphismus von Varietäten ist.

(b) Finden Sie für jeden Körper k der Charakteristik $p > 0$ ein Tupel (X, Y, ϕ), so dass ϕ kein Isomorphismus algebraischer Gruppen ist – die Definition dieser Morphismus hängt aber schon vom Körper(-charakteristik) ab.

(c)* Zeigen Sie für $\mathrm{char}(k) = 0$ mit den folgenden Schritten, dass ϕ ein Isomorphismus algebraischer Gruppen ist. Setzen Sie dabei in (i)–(iii) voraus, dass X und Y zusammenhängend sind.

(i) Verwenden Sie $\dim X = \dim Y$ (s. Vorlesung), um zu folgern, dass $k(X)$ eine endliche separable Erweiterung von $k(Y)$ ist.

(ii) Finden Sie $f \in k[Y]$ und $h = h(T) \in k[Y]_f[T]$, so dass $k[X]_f \cong k[Y]_f[T]/(h)$ gilt, und so dass h als Polynom in $k(Y)[T]$ separabel ist.

(iii) Zeigen Sie, dass es einen Punkt $y \in \mathrm{Max}(k[Y]_f)$ gibt, so dass das Bild von h in $k[T]$ unter der von y induzierten Auswertungsabbildung $k[Y]_f \to k$ ein separables Polynom ist, und folgern Sie $\mathrm{grad}(h(T)) = 1$. Hiermit ist die Aussage unter der Voraussetzung bewiesen, dass X und Y zusammenhängend sind. **Hinweis:** Verwenden Sie die *Diskriminante* um y zu finden.

(iv) Reduzieren Sie den allgemeinen Fall auf das bisher bewiesene.
