Algebraische Gruppen — Übungsblatt 5
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño — Abgabe: Di. 27.05.2014 um 11:00 Uhr

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

17. Aufgabe (Charaktere und Cocharaktere, 4 Punkte): Sei G eine LAG über k. Sei $X^*(G) := \mathrm{Hom}_{k\text{-LAG}}(G, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ die Gruppe der Charaktere von G und $X_*(G) := \mathrm{Hom}_{k\text{-LAG}}(\mathbb{G}_\mathrm{m}, G)$ die Menge der Cocharaktere.

(a) Man identifiziere $X^*(G)$ mit einer Teilmenge von $k[G]$ und überlege, dass die Auswertung an e_G das neutrale Element von $X^*(G)$ ist.

(b) Es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $\xi\colon X^*(\mathbb{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ welcher $\mathrm{id}_{\mathbb{G}_\mathrm{m}}$ auf 1 abbildet.

(c) Ist G abelsch, so ist $X_*(G)$ eine Gruppe vermöge der folgenden Multiplikationsabbildung: für $\rho_1, \rho_2 \in X_*(G)$ ist $\rho_1 * \rho_2 : \mathbb{G}_\mathrm{m} \xrightarrow{\text{diag.}} \mathbb{G}_\mathrm{m} \times \mathbb{G}_\mathrm{m} \xrightarrow{\rho_1 \times \rho_2} G \times G \xrightarrow{\mu_G} G$ – das neutrale Element ist der einzige k-Morphismus von $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ nach G, der über ϵ_G faktorisiert. Geben Sie ein Beispiel einer linearen algebraischen Gruppe G an, wo die so eben beschriebene Menge $X_*(G)$ keine Gruppe ist.

(d) Beschreiben Sie $X^*(\mathbb{D}_n)$ und $X_*(\mathbb{D}_n)$ möglichst explizit und zeigen Sie, dass

$$X^*(\mathbb{D}_n) \times X_*(\mathbb{D}_n) \to X^*(\mathbb{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow[\sim]{\xi} \mathbb{Z},\ (\chi, \rho) \mapsto \xi(\chi \circ \rho)$$

eine perfekte Paarung freier, endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Moduln ist.

18. Aufgabe (Diagonalisierbare algebraische Gruppen zu abelschen Gruppen, 6 Punkte): Für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe $(M, \cdot_M)$, definiert man $k\{M\}$ als die folgende Hopfalgebra:

- Als k-Vektorraum ist $k\{M\}$ der Vektorraum mit Basis M.
- Die Multiplikation auf Basiselementen ist gegeben durch $m(x \otimes y) := x \cdot_M y$.
- Die Comultiplikation auf Basiselementen ist $\Delta(x) := x \otimes x$, das Koinverse von x ist x^{-1} (Inverses in M), die Koeins bildet alle x auf 1_M ab.

Man zeige:

(a) Die k-Algebra $k\{M\}$ bildet mit den oben angegebenen Abbildungen eine Hopfalgebra. Die dazugehörige lineare algebraische Gruppe wird mit G_M bezeichnet.

(b) Es gelten $G_\mathbb{Z} = \mathbb{G}_\mathrm{m}$ und, sofern n nicht von $\mathrm{char}(k)$ geteilt wird, $G_{\mathbb{Z}/n} = \boldsymbol{\mu}_n$.

(c) Seien M und N zwei abstrakte, endlich erzeugte Gruppen. Es gilt $k\{M\} \otimes k\{N\} = k\{M \times N\}$ als Hopfalgebren.

(d) Die Abbildungen $M \mapsto G_M = \mathrm{Max}(k\{M\})$ und $G \mapsto X^*(G)$ definieren zueinander quasi-inverse Funktoren zwischen der Kategorie der endlich erzeugten, abelschen Gruppen und der Kategorie der diagonalisierbaren linearen algebraischen Gruppen.

(e) Definiere $\underline{\mathrm{Hom}}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{G}_\mathrm{m}) : k\text{-}\mathbf{Alg}^{\mathrm{aff}} \to \mathbf{Ab}$ als den Funktor durch $R \mapsto \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{G}_\mathrm{m}(R))$, wobei $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ via $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{k\text{-LAG}}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$ operiert. Zeigen Sie, dass $\underline{\mathrm{Hom}}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ durch G_M darstellbar ist.

(f) Die Zuordnungen $H \mapsto H^\perp := \{\chi \in X^*(G) \mid \chi(H) = 1\}$ und $Y \mapsto Y^\perp := \{h \in G \mid \chi(h) = 1 \text{ für alle } \chi \in Y\}$ induzieren inklusionsumkehrende Bijektionen zwischen den abgeschlossenen Untergruppen H von G und den Untergruppen von $X^*(G)$.

19. Aufgabe (Komoduln, 2 Punkte): Sei G die lineare algebraische Gruppe zu einer Hopfalgebra A. Ein A-*Komodul* ist ein Paar (V, ϕ), wobei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum ist und $\phi : V \to V \otimes A$ eine k-lineare Abbildung, die folgende zwei Gleichungen erfüllt: $(\mathrm{id}_V \otimes \epsilon)\phi = \mathrm{id}_V$ (hier benutzen wir die kanonische Identifikation $V = V \otimes k$) und $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\phi = (\phi \otimes \mathrm{id}_A)\phi$.
Zeigen Sie, dass es eine (*kanonische*) Bijektion zwischen linearen Darstellungen in V (d.h. Morphismen linearer algebraischer Gruppen $G \to \mathrm{GL}_V$) und A-Komoduln gibt.

Hinweis: Im Folgenden betrachten wir algebraische Gruppen als Funktoren $k\text{-}\mathbf{Alg}^{\mathrm{aff}} \to \mathbf{Gp}$. Zu einer Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}_V$ ist dann das entsprechende $\phi : V \to V \otimes A$ durch $\rho(\mathrm{id}_{G(A)})$ bestimmt. Umgekehrt induziert jedes $\phi : V \to V \otimes A$ eine Abbildung $\rho : G(R) \to \mathrm{End}_R(V \otimes R)$, die aufgrund der Bedingungen eines Komoduls einen Gruppenhomomorphismus linearer algebraischer Gruppen definiert.
