Algebraische Gruppen — Übungsblatt 6
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño — Abgabe: Di. 03.06.2014 um 11:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

20. Aufgabe (Elementar unipotente Gruppen und $k[\sigma]$-Moduln, 3 Punkte): Sei $k[\sigma]$ wie in der Vorlesung definiert. Für einen endlich erzeugten $k[\sigma]$-Modul M, sei $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[\sigma]}(M, \mathbb{G}_\mathrm{a}) : k\text{-}\mathbf{Alg}^{\mathrm{aff}} \to \mathbf{Ab}$ der Funktor $A \mapsto \mathrm{Hom}_{k[\sigma]}(M, A)$, wobei die Elemente von $k[\sigma]$ auf $(A, +)$ als p-lineare Abbildungen operieren (vermöge $\sigma \mapsto (a \mapsto a^p)$). Zeigen Sie:

(a) Die k-Algebra $k[\sigma]$ ist ein links- und rechts-euklidischer Ring, und jedes links- oder rechts-$k[\sigma]$-Ideal ist ein Hauptideal.

(b) Jeder endlich erzeugte links-$k[\sigma]$-Modul ist isomorph zu einem Modul der Form $k[\sigma]^r \oplus \bigoplus_i k[\sigma]/k[\sigma]f_i$ für geeignete f_i in $k[\sigma] \setminus k$.

(c) Der Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[\sigma]}(k[\sigma], \mathbb{G}_\mathrm{a})$ wird durch $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ dargestellt.

(d) Zu $f(\sigma) = \sum a_i \sigma^i \in k[\sigma]$ sei $f(T) = \sum_i a_i T^{p^i} \in k[T]_{p\text{-lin}}$ das zugehörige p-lineare Polynom. Dann definiert $G_f = V(f(T)) \subset \mathbb{G}_\mathrm{a}$ eine endliche, additive Untergruppe, welchen den Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[\sigma]}(k[\sigma]/k[\sigma]f, \mathbb{G}_\mathrm{a})$ darstellt.

21. Aufgabe (Tangentialräume, 2+1* Punkte): Sei $\phi : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion affiner k-Varietäten, so dass $\phi^* : k[Y] \to k[X]$ ein surjektiver Homomorphismus affiner k-Algebren ist. Sei I der Kern von ϕ^*. Sei $x = \mathfrak{m}_x \in X = \mathrm{Max}\, k[X]$ mit Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}_x : k[X] \to k$ und sei $y = \mathfrak{m}_y := \phi(x)$. Zeigen Sie:

(a) Die Sequenz $0 \to T_x X \xrightarrow{\phi^*} T_y Y \xrightarrow{\cdot|_I} \mathrm{Hom}_{k[X]}(I/I^2, k) \to 0$ von k-Vektorräumen ist wohl-definiert und linksexakt; hierbei ist k ein $k[X]$-Modul vermöge ev_x. Begründen Sie, dass I/I^2 ein $k[X]$-Modul ist.

(b) Es gilt $\mathrm{Hom}_{k[X]}(I/I^2, k) = \mathrm{Hom}_k(I/\mathfrak{m}_y I, k)$, und die Sequenz in (a) ist exakt, wenn X glatt an x und Y glatt an y ist.
Hinweis: Für die Komplettierung $\widehat{I} = \mathrm{Kern}(\widehat{k[Y]} \to \widehat{k[X]})$ an $\mathfrak{m}_y$ ist $\widehat{I}/\widehat{\mathfrak{m}}_y\widehat{I}$ leicht zu berechnen.

22. Aufgabe ($\mathrm{Lie}\, G$ und G-invariante Vektorfelder, 4 Punkte): Seien G eine LAG, $\mathrm{Lie}\, G$ die zugehörige Lie-Algebra $T_e G$ und $\mathcal{D}_G$ der Vektorraum der G-invarianten Vektorfelder auf G. Für $D \in \mathcal{D}_G$ liegt $\mathrm{ev}_e \circ D$ in $\mathrm{Lie}\, G$, wie in der Vorlesung gezeigt wurde. Definiere zu $\delta \in \mathrm{Lie}\, G$ die Abbildung $D_\delta : k[G] \to k[G]$ durch $D_\delta = (1 \otimes \delta) \circ \Delta$, für Δ die Komultiplikation auf G. Zeigen Sie:

(a) Der Homomorphismus D_δ ist eine k-Derivation von $k[G]$ nach $k[G]$. (Prüfen Sie dazu insbesondere die Formel $(1 \otimes \delta)(FG) = (1 \otimes \delta)(F)(1 \otimes \mathrm{ev}_e)(G) + (1 \otimes \delta)(G)(1 \otimes \mathrm{ev}_e)(F)$ für $F, G \in k[G] \otimes k[G]$.)

(b) Die Abbildungen $\delta \mapsto D_\delta$ und $D \mapsto \mathrm{ev}_e \circ D$ sind zueinander inverse k-Vektorraumhomomorphismen.

(c) Sind $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_G$, so ist $[D_1, D_2] := D_1 D_2 - D_2 D_1$ ein G-invariantes Vektorfeld.

(d) Sind $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Lie}\, G$, so gilt $[\delta_1, \delta_2] := \mathrm{ev}_e \circ [D_{\delta_1}, D_{\delta_2}] = (\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1) \circ \Delta$.

23. Aufgabe (Untergruppen diagonalisierbarer Gruppen, 2 Punkte): Seien $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \mathrm{GSp}_{2n} \subset \mathrm{GL}_{2n}$ und $\mathrm{O}_n \subset \mathrm{GL}_n$ die Untergruppen aus Aufgabe 7 bzw. 10.

(a) Bestimmen Sie die Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{gl}_{2n} = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_{2n})$ zu Sp_{2n} und GSp_{2n} und von $\mathfrak{gl}_n = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n)$ zu O_n.

(b) Begründen Sie, dass die Lie-Klammer in beiden Fällen durch die Kommutatorklammer in M_{2n} bzw. M_n gegeben ist.
