Algebraische Gruppen — Übungsblatt 7
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño — Abgabe: Di. 10.06.2014 um 11:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

24. Aufgabe (Separabilität für Gruppen- und G-Raum-homomorphismen, 4 Punkte): Seien G eine lineare algebraische Gruppe und $\phi : X \to Y$ ein dominanter, G-äquivarianter Morphismus homogener G-Räumen (ϕ ist dann surjektiv; warum?). Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gelten die Äquivalenzen:

(i) ϕ ist separabel $\Longleftrightarrow$ $d\phi_x$ ist surjektiv für alle $x \in X$ $\Longleftrightarrow$ $d\phi_x$ ist surjektiv für ein $x \in X$.

(ii) ϕ ist ein Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ ϕ ist bijektiv und $d\phi_x$ ist ein Isomorphismus für ein (oder alle) $x \in X$.

(b) Der Morphismus ϕ ist universell offen und es gilt für alle $Z \subset Y$ abgeschlossen und $Z' \subset \phi^{-1}(Z)$ irreduzibel die Aussage $\dim Z' - \dim Z = \dim X - \dim Y \geq 0$.

(c) Zu welchen Aussagen spezialisieren sich (a) und (b) im Fall eines Homomorphismus $\phi : G \to H$ algebraischer Gruppen (für $x = e$ bzw. $Z = \{e\}$)?

Hinweis: Wenden Sie in (a) und (b) Sätze aus der Vorlesung an, die für allgemeine Varietäten formuliert wurden.

25. Aufgabe (Zur Exaktheit von Sequenzen algebraischer Gruppen, 1 Punkt): Seien $\phi : K \to G$ und $\psi : G \to H$ Morphismen linearer algebraischer Gruppen, so dass die induzierte Sequenz $1 \to K(k) \to G(k) \to H(k) \to 1$ exakt ist. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(a) Die Sequenz $0 \to \operatorname{Lie} K \to \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} H \to 0$ ist exakt.

(b) Der Morphismus ϕ ist eine abgeschlossene Immersion und ψ ist separabel.

26. Aufgabe (Über die adjungierte Darstellung, 2+2 Punkte): Seien G eine lineare algebraische Gruppe und $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{GL}(\operatorname{Lie} G)$ ihre adjungierte Darstellung. Die induzierte Abbildung der Lie-Algebren sei $\operatorname{ad} := d(\operatorname{Ad}) : \operatorname{Lie} G \to \operatorname{End}(\operatorname{Lie} G) = \operatorname{Lie}(\operatorname{GL}(\operatorname{Lie} G))$. Man zeige:

(a) Die Abbildung ad ordnet jedem $X \in \operatorname{Lie} G$ den k-linearen Endomorphismus $\operatorname{ad}(X)$ von $\operatorname{Lie} G$ zu, der durch $Y \mapsto [X, Y]$ definiert ist, wobei $[\cdot, \cdot]$ die Lie-Klammer auf $\operatorname{Lie} G$ bezeichne.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst den Fall $G = \operatorname{GL}_n$ basierend aus den expliziten Formeln aus der Vorlesung. Führen Sie anschließend den allgemeinen Fall auf den Fall $G = \operatorname{GL}_n$ zurück.

(b) Es gelten $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}) = \operatorname{Zentrum}(\operatorname{Lie} G)$ und $\operatorname{Ker}(\operatorname{Ad})$ umfasst das Zentrum $Z(G)$ von G. Ist G zusammenhängend und $\operatorname{char} k = 0$, so gilt $\operatorname{Ker}(\operatorname{Ad}) = Z(G)$.
Hinweis: Für $x \in G$ und $h_x : G \to G,\ g \mapsto xgx^{-1}g^{-1}$ bestimme man $dh_x : T_eG \to T_eG$ und zeige $x \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Ad}) \Leftrightarrow dh_x = 0$. Verwenden Sie nun (24.a.i) und beachten Sie, dass h_x die Verkettung einer Rechtstranslation und eines G-Morphismus ist.

27. Aufgabe (Kommutativität von G und $\operatorname{Lie} G$, 1+2 Punkte): Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit Lie-Algebra $\operatorname{Lie} G$. Zeigen Sie:

(a) Im Fall $\operatorname{char} k = 0$ gilt: G ist kommutativ genau dann, wenn $\operatorname{Lie} G$ kommutativ ist.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (b) der vorigen Aufgabe.

(b) Es gelte $\operatorname{char} k = p > 0$ und es sei G die Untergruppe von GL_3 bestehend aus den Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $a, b \in k$. Dann ist G eine abgeschlossene, nicht-kommutative Untergruppe von GL_3 der Dimension 2. Die Lie-Algebra von G ist kommutativ und als Lie-Unteralgebra von $M_3(k)$ erzeugt von den Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es gelten ausserdem $Z(G) = \{e_G\} \subsetneq \operatorname{Ker}(\operatorname{Ad}) \subsetneq G$.