Algebraische Gruppen — Übungsblatt 8
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño Abgabe: Di. 17.06.2014 um 11:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

28. Aufgabe (Halbeinfache Elemente in nilpotenten Gruppen, 2 Punkte): Sei G eine zusammenhängende, nilpotente, lineare algebraische Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge G_s der halbeinfachen Elemente von G im Zentrum $Z(G)$ liegt, und dass G_s eine abgeschlossene Untergruppe von G ist.
Hinweis: Für s in G_s sei $\tau : G \to G$ die Abbildung $g \mapsto sgs^{-1}g^{-1}$. Man folgere aus der Nilpotenz von G, dass für n groß genug $\tau^n = \tau \circ \overset{n\text{ mal}}{\cdots} \circ \tau$ trivial ist, und leite hieraus $d\tau = 0$ ab. Man folgere $\tau(G) = \{e\}$ und zeige dann die übrigen Aussagen der Aufgabe.

29. Aufgabe (G/H in der Kategorie geringter Räume, 4 Punkte): Sei $(G, \mathscr{O}_G)$ eine lineare algebraische Gruppe (als geringter Raum mit Garbe der regulären Funktionen) und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Wir definieren $G/H := \{gH \mid g \in G\}$ als die Menge der Linksnebenklassen bzgl. H von G. Die kanonische Abbildung $G \to G/H$ sei mit π bezeichnet. Man wählt auf G/H die feinste Topologie, so dass die Abbildung π stetig ist, d.h. $\overline{U}$ ist offen in G/H genau dann, wenn $\pi^{-1}(\overline{U})$ offen in G ist – die sog. *Quotiententopologie*. Man definiert eine Prägarbe $\mathscr{O}_{G/H}$ auf G/H indem man für jede offene Teilmenge $\overline{U} \subset G/H$ mit Urbild $U = \pi^{-1}(\overline{U})$

$$\mathscr{O}_{G/H}(\overline{U}) := \{f : \overline{U} \to k \mid \pi^*(f) := f \circ \pi \in \mathscr{O}_G(U)\}$$

setzt. Als Restriktionsabbildung wählt man die Restriktionsabbildung von Funktionen. Man zeige:

(a) $(G/H, \mathscr{O}_{G/H})$ ist ein geringter Raum.

(b) $(G/H, \mathscr{O}_{G/H})$ ist universeller Quotient in der Kategorie der geringter Räume.

Zur Einnerung: Ein *geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathscr{O}_X)$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe k-wertiger Funktionen auf (den offenen Teilmengen von) X. Ein *Morphismus geringter Räume* $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ ist eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$, so dass für alle V offen in Y gilt: das Bild von $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathrm{Abb}(\phi^{-1}(V), k) : f \mapsto f \circ \phi$ liegt in $\mathscr{O}_X(\phi^{-1}(V))$.

30. Aufgabe (Morphismen zu Graphen, 2 Punkte): Seien X, Y Varietäten, $f : X \to Y$ eine Abbildung der zugrundeliegenden Mengen. Sei Γ_f der Graph von f (als Teilmenge von $X \times Y$). Gelten nun die folgenden vier Bedingungen, so ist f ein Morphismus von Varietäten.

(a) Der Graph Γ_f ist abgeschlossen in $X \times Y$.

(b) Die Varietät X ist glatt und irreduzibel.

(c) Γ_f ist irreduzibel.

(d) $\mathrm{pr}_1 : \Gamma_f \to X$ ist separabel.

Hinweis: Mit der schwachen Version des Hauptsatzes von Zariski zeige man, dass pr_1 einen Isomorphismus ist.
Bemerkung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass (a) für Morphismen f von Varietäten stets gilt.

31. Aufgabe (Nicht-abgeschlossene Konjugationsklassen, 2 Punkte): Sei $G = \mathrm{SL}_2$ und $\sigma := \mathrm{inn}_g$ der innere Automorphismus von G, der durch Konjugation mit der Matrix $g := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ definiert ist. Zeigen Sie

(a) Die Konjugationsklasse von g ist nicht abgeschlossen.

(b) Es gilt $\mathrm{Lie}(G_\sigma) \subsetneq (\mathrm{Lie}\, G)_\sigma$ im Fall $\mathrm{char}\, k = 2$. Für einen beliebigen inneren Automorphismus σ von $G := \mathrm{GL}_2$ gilt immer $\mathrm{Lie}(G_\sigma) = (\mathrm{Lie}\, G)_\sigma$.

32. Aufgabe (GL_n modulo O_n, 2 Punkte): Es gelte $\mathrm{char}\, k \neq 2$. Man finde eine transitive algebraische Operation von GL_n auf der Varietät Sym_n der invertierbaren, symmetrischen $n \times n$-Matrizen, so dass $\mathrm{GL}_n/\mathrm{O}_n \cong \mathrm{Sym}_n$ ist (wobei O_n der Stabilizator eines geeigneten Elements ist), und folgere $\dim \mathrm{O}_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
