Algebraische Gruppen — Übungsblatt 9
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño Abgabe: Di. 24.06.2014 um 11:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

33. Aufgabe (Faktorvarietäten und Produkten, 2 Punkte): Seien $H_i \subset G_i$ für $i = 1, 2$ abgeschlossene Untergruppen linearer algebraischer Gruppen. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus $G_1 \times G_2$-Räume $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2$ gibt.

34. Aufgabe (Faktorvarietäten zu $G = \mathrm{SL}_2$, 4 Punkte): Sei $H_1 \subset \mathrm{SL}_2$ die abgeschlossene Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und sei $H_2 = (H_1)_u \subset H_1$ die abgeschlossene Untergruppe der unipotenten Elemente. Zeigen Sie:

(a) Die Faktorvarietät SL_2/H_1 ist isomorph zu $\mathbb{P}^1_k$.

(b) Die Faktorvarietät SL_2/H_2 isomorph zur (nicht affinen) Varietät $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$.

(c) Konstruieren Sie für $i = 1, 2$ eine lineare Darstellung V_i von SL_2 zusammen mit einem 1-dimensionalen Untervektorraum $L_i \subset V_i$, so dass $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2}(L_i) = H_i$ gilt.

35. Aufgabe (Die Charaktergruppe ist endlich erzeugt, 2 Punkte): Beweisen Sie, dass die Charaktergruppe $X^*(G)$ einer linearen algebraischen Gruppe G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe ist.

Hinweis: Reduzieren Sie die Aufgabe auf den Fall G zusammenhängend ist; betrachten Sie dann den Quotienten $G/[G, G]$; überlegen Sie dabei auch, dass $\mathrm{Hom}_{k\text{-LAG}}(\mathbb{G}_\mathrm{a}, \mathbb{G}_\mathrm{m}) = 0$ gilt.

36. Aufgabe (Der Koordinatenring einer affinen Faktorvarietät, 4 Punkte): Seien G eine lineare algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Sei

$$A := \{f \in k[G] \mid f(gh) = f(g) \text{ für alle } g \in G,\, h \in H\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist G/H affin, dann $k[G/H] = A$.

(b) Die Faktorvarietät G/H ist genau dann affin, wenn A eine k-Algebra von endlichem Typ ist, welche Links-H-Nebenklassen trennt; d.h. für alle $g_1H \neq g_2H$, gibt es ein $f_{12} \in A$ mit $f_{12}(g_1) \neq f_{12}(g_2)$.

Hinweis: Für die Rückrichtung benutzen Sie, dass die k-Varietät $X := \mathrm{Max}(A)$ zusammen mit Linkstranslationen die Struktur eines homogenen Raumes hat, der die universelle Eigenschaft einer Faktorvarietät erfüllt (hierbei ist $\pi : G \to X$ der durch die natürliche Inklusion $A \hookrightarrow k[G]$ definierte dominante Morphismus).
