Algebraische Gruppen — Übungsblatt 10
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño — Abgabe: Di. 01.07.2014 um 11:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.

37. Aufgabe (Eigenschaften vollständiger Varietäten, 2 Punkte): Zeigen Sie, dass für eine vollständige Varietät X folgende Aussagen gelten:

(a) Ist $\phi : X \to Y$ ein Morphismus, so ist $\phi(X)$ abgeschlossen in Y.

(b) Ist X affin, so ist X endlich.
Hinweis: Verwenden Sie, dass alle Morphismen von den Zusammenhangskomponenten von X nach $\mathbb{A}^1$ konstant sind.

38. Aufgabe (Boreluntergruppen klassischer Gruppen, 6 Punkte):

(a) Sei $T_n \subset \mathrm{GL}_n \cong \mathrm{GL}(V)$ die abgeschlossene Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Die Boreluntergruppen von GL_n sind gerade die Stabilisatoren vollständiger Fahnen von $V = k^n$. Sie bilden die Konjugationsklassen von T_n unter GL_n, und T_n ist der Stabilisator einer Standardfahne in V.

(b) Es gelte $\mathrm{char} k \neq 2$. Sei $(\cdot,\cdot)$ die Bilinearform auf $V = k^n$ gegeben durch $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i}$. Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_n := \mathrm{O}(V, (\cdot,\cdot))$ ist die Untergruppe der g in GL_n, so dass $(gx, gy) = (x, y)$ für alle $x, y \in V$ gilt. Ein Unterraum W von V heißt *isotrop*, falls die Einschränkung von der Bilinearform auf $W \times W$ konstant Null ist. Eine *(vollständige) isotrope Fahne von* V ist ein isotroper Unterraum $W \subset V$ (der Dimension $\lfloor n/2 \rfloor$) zusammen mit einer (vollständigen) Fahne von W.
Zeigen Sie, dass die Boreluntergruppen von O_n genau die Stabilisatoren vollständiger, isotroper Fahnen sind. Weiter gebe man die Boreluntergruppe für die Fahne $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_{\lfloor n/2 \rfloor}$ explizit an, für V_i die lineare Hülle der Standarbasiselementen $e_1, \dots, e_i$ von $V = k^n$.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst eine Boreluntergruppe und zeigen Sie, dass diese der Stabilisator einer vollständigen, isotropen Fahne in V ist. Betrachten Sie dafür $B_0 := \mathrm{SO}_n \cap T_n$ (hier verstehen wir $\mathrm{SO}_n \subset \mathrm{O}_n \subset \mathrm{GL}_n = GL(V)$), und beweisen Sie, dass $B_0 \subset \mathrm{O}_n$ eine Boreluntergruppe ist, die die Standardfahne von dem maximal isotropen Raum $W_0 := \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} k e_i$ stabilisiert, wo $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von $V = k^n$ ist. Hierfür könnte die Berechnung in [MT, Example 6.7.4] hilfreich sein.
Dann benutzen Sie ohne Beweis Aussagen über quadratischen Formen (z.B. aus [JacI, §6.5]), um die Behauptung dieser Teilaufgabe zu zeigen – im Grunde genommen den Satz von Witt.

(c) Sei nun $V = k^{2n}$ mit einer alternierenden Bilinearform $\langle \cdot,\cdot \rangle$ gegeben durch

$$\langle (x_1, \dots, x_{2n}), (y_1, \dots, y_{2n}) \rangle := \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i).$$

Dann definiert die Menge der $g \in \mathrm{GL}_{2n} = GL(V)$, so dass $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$, die *symplektische Gruppe* $G := \mathrm{Sp}_{2n}$. So wie bei (b), definiert man *isotrope Fahnen*.
Zeigen Sie, dass die Boreluntergruppen von Sp_{2n} genau die Stabilisatoren der maximal isotropen Fahnen in V sind.
Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie bei der orthogonalen Gruppe vor. Benutzen Sie ohne Beweis Aussagen über alternierenden Formen (z.B. aus [JacI, §6.9]).

Bestimmen Sie sämtliche maximale Tori der hier behandelten, klassischen Gruppen.

39. Aufgabe (Parabolische Untergruppen unter Epimorphismen, 2 Punkte): Sei $\phi : G \to G'$ ein surjektiver Morphismus linearer algebraischer Gruppen. Zeigen Sie:

(a) Ist $B \subset G$ eine Boreluntergruppe, so auch $\phi(B) \subset G'$.
Hinweis: Betrachte man $G/B \to G'/\phi(B)$.

(b) Ist $P \subset G$ eine parabolische Untergruppe, so auch $\phi(P) \subset G'$.

Gelten die Aussagen auch ohne die Surjektivität von ϕ? Finden Sie gegebenenfalls Gegenbeispiel(e).

40. Aufgabe (Das Zentrum von G und von einer Boreluntergruppe, 2 Punkte): Seien G eine zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe und $B \subset G$ eine Boreluntergruppe. Zeigen Sie:

(a) Die Zusammenhangskomponente des Zentrums Z_G^0 ist auflösbar (und zusammenhängend) und es gilt $Z_G^0 \subset Z_B$ – es ist zunächst $Z_G^0 \subset B$ zu zeigen.

(b) Das Zentrum der Boreluntergruppe Z_B liegt im Zentrum Z_G von G.
Hinweis: Betrachte zu b aus Z_B die wohldefinierte Abbildung $G/B \to G : gB \mapsto gbg^{-1}$.

Literatur

[JacI] N. Jacobson, *Basic algebra. I*, second edition, Freeman, New York, 1985.

[MT] G. Malle, D. Testerman, *Linear algebraic groups and finite groups of Lie type*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.