Algebraische Gruppen — Übungsblatt 11
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño Abgabe: Di. 08.07.2014 um 11:00 Uhr

---

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt. Im weiteren sei G stets eine zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe über k.

41. Aufgabe (Das Zentrum einer Boreluntergruppe, 1 Punkt): Für eine Boreluntergruppe $B \subset G$ zeige man $Z_B = Z_G$ für die Zentren von B und G.
Hinweis: Eine Richtung benutzt den Dichtesatz, die Andere hatten wir schon überlegt (wann?).

42. Aufgabe (Tori in auflösbaren linearen algebraischen Gruppen, 4 Punkte): Es sei G eine auflösbare Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen (a)–(c) mit Induktion über $\dim G_{\mathrm{u}}$. Verwenden Sie dabei, dass die Aussagen für $\dim G_{\mathrm{u}} = 1$ bereits in der Vorlesung gezeigt wurden, und dass man in G stets einen Normalteiler $N \cong \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ findet, so dass N im Zentrum von G_{u} liegt.

(a) Jedes $g \in G_{\mathrm{s}}$ liegt in einem Maximalen Torus.

(b) Für alle $g \in G_{\mathrm{s}}$ ist $Z_G(g)$ zusammenhängend.

(c) Je zwei Maximale Tori in G sind konjugiert.

43. Aufgabe (Erzeuger von Zentralisatoren von Tori, 2 Punkte): Sei $S \subset G$ ein Torus. Zeigen Sie, dass es ein $s \in S$ gibt, so dass $Z_G(S) = Z_G(s)$ gilt.
Hinweis: (i) Überlegen Sie, dass es genügt, die Aussage für $G = \mathrm{GL}_n$ und $S \subset D_n$ zu zeigen. (ii) Sei nun χ_i der Charakter von S, der die Operation von S auf dem i-ten Standardvektor von k^n beschreibt. Betrachten Sie die Teilmenge $\bigcap_{i \neq j} \{s \in S \mid \chi_i(s) \neq \chi_j(s)\} \subset S$.

44. Aufgabe (Der Normalisator einer Cartanuntergruppe, 2 Punkte): Man zeige für eine Cartanuntergruppe $C \subset G$, dass $[N_G(C) : C]$ endlich ist.
Hinweis: Ist T der Maximale Torus mit $C = Z_G(T)^\circ$, so überlege man zunächst $N_G(C) = N_G(T)$.

45. Aufgabe (Normalisatoren Maximaler Tori, 3 Punkte):

(a) Für $G = \mathrm{GL}_n$, $B = T_n$ und $T = D_n$ zeige man die folgenden Aussagen: (i) $Z_G(T) = T$, (ii) $N_G(T)$ ist die Menge der Monomialmatrizen von G und (iii) $N_G(T)/Z_G(T)$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ aller Permutationen einer n-elementigen Menge.

(b) Sei $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ und seien B, T wie in der Aufgabe 38.c für die Standardfahne. Zeigen Sie $Z_G(T) = T$, beschreiben Sie $N_G(T)$ und finden Sie einen Isomorphismus $N_G(T)/Z_G(T) \cong (\mathbb{Z}/(2))^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 1$ und $n = 2$.
