Algebraische Gruppen — Übungsblatt 12
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño — Abgabe: Di. 15.07.2014 um 11:00 Uhr

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt. Im weiteren sei G stets eine zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe über k.

46. Aufgabe (Operationen von Tori auf $\mathbb{P}V$, 3 Punkte): Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über k, T ein Torus und $\circ : T \times V \to V$ eine Darstellung von T auf V. Wir betrachten die induzierte Operation von T auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}V$. Das Bild von $v \in V \setminus \{0\}$ in $\mathbb{P}V$ sei $[v]$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert einen Kocharakter $\lambda : \mathbb{G}_\mathrm{m} \to T$, so dass die Fixpunktmengen $\mathbb{P}V^{\lambda(\mathbb{G}_\mathrm{m})} \supset \mathbb{P}V^T$ übereinstimmen.

(b) Für $T = \mathbb{G}_\mathrm{m}$, zerlege V als $V = \oplus_i V_i$, wobei $V_i := \{v \in V \mid t \circ v = t^i v \text{ für alle } t \in T\}$, und sei $v = \sum v_i \in V \setminus \{0\}$ mit $v_i \in V_i$. Setze $r = \min\{i \mid v_i \neq 0\}$ und $s = \max\{i \mid v_i \neq 0\}$. Dann gelten:

(i) $[v] \in \mathbb{P}V^{\mathbb{G}_\mathrm{m}}$ genau dann, wenn $r = s$.

(ii) Gilt $r < s$, so lässt sich $\mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbb{P}V : t \mapsto [t \circ v]$ fortsetzen zu einem Morphismus $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}V$ mit $0 \mapsto v_r$, $\infty \mapsto v_s$ und es gilt $\overline{\mathbb{G}_\mathrm{m}[v]} = [v_r] \sqcup [v_s] \sqcup \mathbb{G}_\mathrm{m}[v]$.

47. Aufgabe (Satz von Konstant-Rosenlicht, 2 Punkte): Sei X eine affine Varietät und $G \times X \to X$ eine Operation von G auf X. Zeigen Sie: Ist G unipotent, so sind alle Bahnen von G auf X abgeschlossen.
Hinweis: Sei $Y = Gx$ eine Bahn und gelte ohne Einschränkung $\overline{Y} = X$. Sei $Z = X \setminus Y$ und I das Verschwindungsideal von Z. Die G-Operation auf X induziert eine lokal algebraische Operation auf $I \subset k[X]$. Zeigen Sie, $I^G \neq 0$ falls $I \neq 0$ gilt, sowie dass die Elemente von I^G konstante Funktionen auf X sind, und leiten Sie einen Widerspruch zu $Z \neq \emptyset$ her.

48. Aufgabe (Eine Zerlegung von G/B, 8 Punkte): Seien $T \subset B \subset G$ ein maximaler Torus und eine Boreluntergruppe von G, und sei $X = G/B$ die zugehörige Fahnenvarietät. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über k und $\circ : G \times V \to V$ eine Darstellung von G, so dass V einen 1-dimensionalen Untervektorraum V_1 enthällt mit $\mathrm{Stab}_G(V_1) = B$. Sei V die lineare Hülle von GV_1, so dass $X \to \mathbb{P}V : gB \mapsto gV_1$ eine abgeschlossene Immersion ist und es keinen G-stabilen Untervektorraum W von V mit $X \subset \mathbb{P}W$ gibt. Sei weiter $\lambda : \mathbb{G}_\mathrm{m} \to T$ ein Kocharakter wie in 46.a. Zeigen Sie:

(a) Schreibe $V = \oplus_i V_i$ bezüglich der $\mathbb{G}_\mathrm{m}$-Operation und definiere $r := \min\{i \mid V_i \neq 0\}$ und $s := \max\{i \mid V_i \neq 0\}$. Verwenden Sie die Minimalitätseigenschaft von V, um zu zeigen:

(i) $X^T \cap \mathbb{P}(V_r) \subset \mathbb{P}V$ ist nicht leer.
Hinweis: Wähle ein Funktional $v^* \in V^*$ mit $v^*(\oplus_{i>r} V_i) = 0$.

(ii) $X^T \cap \mathbb{P}(V_r)$ ist 1-elementig; sei p_0 der entsprechende Fixpunkt.
Hinweis: Wähle Funktionale $v_j^* \in V^*$ mit $v_j^*(\oplus_{i>r} V_i) = 0$ für $j = 1, 2$, so dass die endlich vielen Punkte von $X^T \cap \mathbb{P}(V_r)$ durch unterschiedliche Funktionale der Form $v_1^* - \mu_k v_2^*$ unterschieden werden, und verwende dass X zusammenhängend ist.

(iii) $\dim V_r = 1$ – das Argument ist ähnlich wie bei (i).

(b) Sei v_0 eine Basis von V_r und seien $v_1 \ldots, v_m$ eine Basis von $\oplus_{i>r} V_i$, so dass jedes v_j in einem V_i liegt. Sei $v_0^*, \ldots, v_m^*$ die Dualbasis und sei $\mathrm{V}_+(v_0^*)$ die duch $v_0^* = 0$ definierte Hyperebene von $\mathbb{P}V$. Dann ist $X_0 := X \setminus \mathrm{V}_+(v_0^*)$ affin und offen in $\mathbb{P}V$ und $X_0 = X(p_0) := \{x \in X \mid p_0 \in \overline{Tx}\}$.

(c) Betrachtet man die Operation von G auf dem Dualraum V^*, so gelten:

(i) Jede G-Bahn schneidet $\mathbb{P}V^* \setminus \mathrm{V}_+(v_0)$.
Hinweis: Welches sind die Gewichte der $\mathbb{G}_m$-Operation auf den v_i^*?

(ii) $G[v_0^*]$ ist eine abgeschlossene G-Bahn in $\mathbb{P}V^*$.
Hinweis: Man überlege zunächst, dass $G[v_0^*]$ im Abschluss einer jeden G-Bahn in $\mathbb{P}V^*$ liegt – dies verwendet unter Anderem (i).

(d) $I(T) := \left(\bigcap_{B \supset T \text{ Boreluntergruppe}} B\right)^\circ$ stabilisiert X_0.
Hinweis: Überlege, dass $\mathrm{Stab}_G([v_0^*]) \subset G$ eine parabolische Untergruppe von G ist, die T enthält.

(e) Für $p \in X^T$ sei $X(p) := \{x \in X \mid p \in \overline{Tx}\}$. Man verwende die Operation der Weyl-Gruppe $N_G(T)/Z_G(T)$, um zu zeigen, dass alle $X(p)$ offen, affin und $I(T)$-invariant sind. Ausserdem überlege man, dass $X = \bigcup_{p \in X^T} X(p)$ gilt.