Algebraische Gruppen — Übungsblatt 13
Sommersemester 2014

Prof. Dr. G. Böckle, Dr. J. Cerviño — Abgabe: Di. 22.07.2014 um 11:00 Uhr

Der zugrundeliegende Körper k ist stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt. Im weiteren sei G stets eine zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe über k.

49. Aufgabe (Die Operation von T auf $B_{\mathbf{u}}$ für G von Rang 1, 2 Punkte): Sei G reduktiv vom Rang 1 und nicht-auflösbar, seien $T \subset G$ ein maximaler Torus und $B \subset G$ eine Boreluntergruppe mit $T \subset B$ und $U := B_{\mathrm{u}}$. Zeigen Sie:

(a) $U \cong \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$, $T \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ operiert auf U via eines nicht-trivialen Charakters α und $T \circ u = U \setminus \{e\}$ für alle $u \in U \setminus \{e\}$.

(b) Liegt n in $N_G(T) \setminus T$, so gilt $U \cap nBn^{-1} = \{e\}$.
Hinweis: Sie dürfen $T = I(T) \stackrel{\text{def}}{=} (B \cap nBn^{-1})^o$ verwenden.

50. Aufgabe (Endlichkeit der Weylgruppe, 2+1* Punkte): Sei $\Psi := (\Phi, X, \Phi^\vee, X^\vee)$ ein Wurzeldatum und sei $Q \subset X$ die $\mathbb{Z}$-lineare Hülle von Φ. Definiere einen Homomorphismus $f : X \to X^\vee$ durch $x \mapsto \sum_{\alpha\in\Phi} \langle x, \alpha^\vee\rangle \alpha^\vee$. Zeigen Sie:

(a) Für $\alpha \in \Phi$ gilt $f(\alpha) = \frac{1}{2}\langle \alpha, f(\alpha)\rangle \alpha^\vee$.

(b) $X_0 := \{x \in X \mid \langle x, \alpha^\vee\rangle = 0 \text{ for all } \alpha \in \Phi\} = \mathrm{Ker}(f)$.

(c) Die Weyl-Gruppe $W(\Psi)$ ist endlich.

51. Aufgabe (Winkel in Wurzeldaten, 2 Punkte): Sei $\Psi := (\Phi, X, \Phi^\vee, X^\vee)$ ein Wurzeldatum mit Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$, Bijektion $\Phi \to \Phi^\vee : \alpha \mapsto \alpha^\vee$ und Weyl-Gruppe $W = W(\Psi)$. Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ $\mathbb{Q}$-linear unabhängig – o.B.d.A. nehmen wir an $|\langle \alpha, \beta^\vee\rangle| \geq |\langle \beta, \alpha^\vee\rangle|$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Genau eine der folgenden 4 Möglichkeiten tritt ein: $(|\langle \alpha, \beta^\vee\rangle|, \mathrm{ord}(s_\alpha s_\beta))$ ist gleich $(0, 2), (1, 3), (2, 4)$ oder $(3, 6)$.

(b) Es gelten $(\langle \beta, \alpha^\vee\rangle = 0 \Longrightarrow \langle \alpha, \beta^\vee\rangle = 0)$, und $(|\langle \alpha, \beta^\vee\rangle| > 1 \Longrightarrow |\langle \beta, \alpha^\vee\rangle| = 1)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Darstellungsmatrix von $s_\alpha s_\beta$ auf der linearen Hülle von α und β bezüglich der Basis α, β und verwenden Sie, dass W endlich ist.

52. Aufgabe (Wurzeldaten und Basen für SO_{2n+1} und Sp_{2n}, 2,5+2,5+1 Punkte):

(a) Es gelte $\mathrm{char} k \neq 2$. Sei $(\cdot,\cdot)$ die Bilinearform auf $V = k^{2n+1}$ definiert durch

$$((x_1, \ldots, x_{2n+1}), (y_1, \ldots, y_{2n+1})) := \sum_{i=1}^{2n+1} x_i y_{2n+2-i}.$$

In Aufgabe 38.a haben wir die Standardboreluntergruppe $B_0 := \mathrm{SO}_{2n+1} \cap T_{2n+1}$ von O_{2n+1} sowie ihren Standardtorus T_0 bestimmt. Wir setzen $G := \mathrm{SO}_{2n+1}$.

(i) Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}_{2n+1}$ von $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ besteht aus den Endomorphismen ϕ von V, die $(\phi v, w) = -(v, \phi w)$ für alle $v, w \in V$ erfüllen.

(ii) Der Standardtorus $T_0 \subset B_0$ besteht aus speziellen, orthogonalen Transformationen der Form:

$$(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n, x_{n+1}, \lambda_n^{-1} x_{n+2}, \ldots, \lambda_2^{-1} x_{2n}, \lambda_1^{-1} x_{2n+1}),$$

für $\lambda_i \in k^\times, i = 1, \ldots, n$ – vgl. auch Aufgabe 45.a. Die Abbildungen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i^\epsilon$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i^\epsilon \lambda_j^\eta$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ und $\epsilon, \eta = \pm 1$ sind Wurzeln von (G, T_0).

(iii) Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}_{2n+1}$ ist die direkte Summe von $\mathfrak{t}_0$ und den Gewichtsräumen $\mathfrak{g}_\alpha$, wobei α die Wurzeln aus (ii) durchläuft. Zeigen Sie, dass G halbeinfach ist.

(iv) Das so definierte Wurzelsystem $\Psi := \Psi(\mathrm{SO}_{2n+1}, T_0)$ ist isomorph zum Wurzelsystem $(\Phi, X, \Phi^\vee, X^\vee)$ gegeben durch $X = X^\vee = \mathbb{Z}^n$ mit der (euklidischen) Standardpaarung, $\Phi := \{\pm\epsilon_i, \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\}$ und $\Phi^\vee := \{\pm 2\epsilon_i, \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\}$. Bestimmen Sie das System positiver Wurzeln Φ^+ zu B_0.

(b) Sei $V = k^{2n}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die alternierende Bilinearform aus Aufgabe 38.c. Die entsprechende Isometriegruppe ist die symplektische Gruppe $G := \mathrm{Sp}_{2n}$. Verwenden Sie Aufgabe 38.c bzw. 45.b (explizite Bestimmung des maximalen Standardtorus T_0' und der Standardboreluntegruppe B_0') und die Konstruktion des Wurzelsystems aus 52.a.ii, um zu zeigen, dass das Wurzelsystem Ψ' zu (Sp_{2n}, T_0') das duale Wurzelsystem von $\Psi(\mathrm{SO}_{2n+1}, T_0)$ ist.

(c) Es gilt:

(i) Die Elemente $\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \epsilon_n$ bilden eine Basis Δ von Φ^+. Die Elemente $\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, 2\epsilon_n$ bilden eine Basis $\Delta^\vee$ von $(\Phi^\vee)^+$.

(ii) $W := W(\Psi) = W(\Psi')$ (und wurde schon im Aufgabe 45.c bestimmt). Geben Sie die Wirkung der Elemente von W auf den Basiselementen aus (i) explizit an.
Hinweis: Zeigen Sie, dass ein Element aus W ϵ_i auf $\eta_i\epsilon_{\sigma(i)}$ für $\eta_i = \pm 1$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ abbildet.
